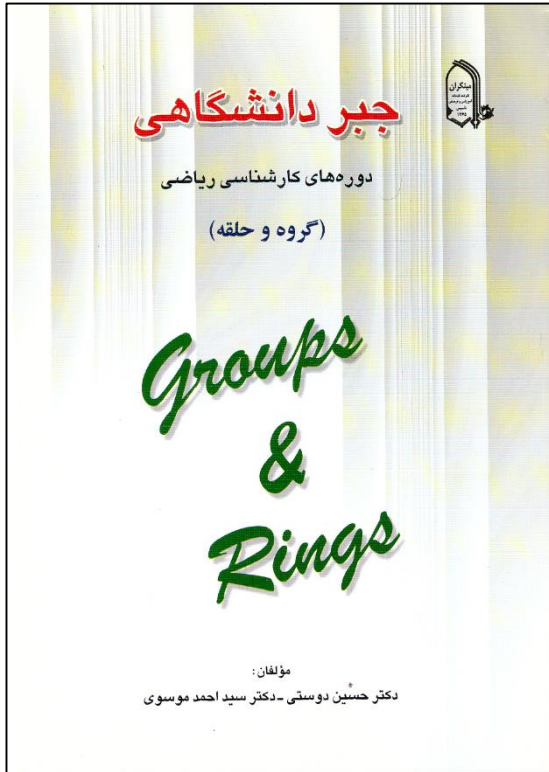


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

درس جبر ۱

جلسه نهم



مبحث : حاصل ضرب مستقیم گروه‌ها (قسمت اول)



دانشگاه شهیدریگان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس : دکتر غلامی





دانشگاه گیلان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

توضیحات



۶.۱ حاصلضرب مستقیم گروهها

به طوری که در بخش ۳.۱ دیدیم حاصلضرب مستقیم دو گروه G_1 و G_2 گروهی متشکل از مجموعه $G_1 \times G_2$ به همراه عمل زیر است:

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd),$$

که $e = (e_1, e_2)$ عضو همانی گروه و معکوس هر $(a, b) \in G_1 \times G_2$ عبارت است از (a^{-1}, b^{-1}) . (اعضای همانی G_1 و G_2 به ترتیب e_1 و e_2 می باشند.) در این بخش به تعمیم این تعریف و بررسی زیرگروههای مهم گروه حاصلضرب مستقیم می پردازیم. ابتدا حالت ساده $G = G_1 \times G_2$ (حاصلضرب مستقیم دو گروه) را بررسی می کنیم. اگر قرار دهیم $G = G_1 \times G_2$ آنگاه G دارای دو زیرگروه نرمال به صورت:

$$\bar{G}_1 = \{(a, e_2) \mid a \in G_1\} \text{ و } \bar{G}_2 = \{(e_1, b) \mid b \in G_2\}$$

است (زیرگروه بودن و سپس نرمال بودن آنها را تحقیق کنید.) به علاوه این زیرگروهها دارای خاصیت $\bar{G}_1 \cong G_1$ و $\bar{G}_2 \cong G_2$ بوده و نیز

$$\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \{1\}, \quad (1 = (e_1, e_2)).$$

این خواص به آسانی تحقیق می شوند که البته در حالت کلی نیز آنها را ثابت خواهیم کرد.

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی



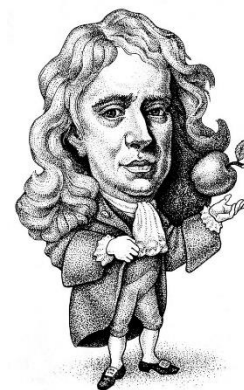


دانشگاه گیلان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

تعریف



۱.۶.۱ تعریف. اگر $G_1, G_2, \dots, G_n$ گروه باشند حاصلضرب مستقیم آنها را که به علامت

$\prod_{i=1}^n G_i$ یا $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ نشان می‌دهیم با عمل

$$(g_1, g_2, \dots, g_n) \cdot (g'_1, g'_2, \dots, g'_n) = (g_1 g'_1, \dots, g_n g'_n)$$

یک گروه است و آن را گروه حاصلضرب مستقیم G_i ها می‌نامیم.

بررسی گروه بودن $\prod_{i=1}^n G_i$ آسان بوده و به روش حالت خاصی است که برای دو گروه گفته

شد. در مورد این گروه به قضیه مهم زیر توجه می‌کنیم.

قضیه

۲.۶.۱ قضیه. اگر گروه $G = \prod_{i=1}^n G_i$ حاصلضرب مستقیم $G_1, G_2, \dots, G_n$ باشد آنگاه زیر

گروههای نرمالی مانند $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_n$ وجود دارد به طوری که

$$(A) \quad \bar{G}_i \simeq G_i \quad (i = 1, \dots, n) ;$$

$$(B) \quad G = \bar{G}_1 \bar{G}_2 \dots \bar{G}_n ;$$

$$(C) \quad \bar{G}_i \cap (\bar{G}_1 \dots \bar{G}_{i-1} \bar{G}_{i+1} \dots \bar{G}_n) = \{1\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی

برهان



برهان. به ازای هر i ، $(1 \leq i \leq n)$ ، $\bar{G}_i$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\bar{G}_i = \{(1, 1, \dots, 1, g, 1, \dots, 1) \mid g \in G_i\}$$

که در آن g مؤلفه i ام است.

به ازای هر i ، $\bar{G}_i$ زیرگروه G است زیرا هر G_i یک گروه است. و اگر

$$x = (g_1, \dots, g_n) \in G \text{ و } y = (1, \dots, 1, g, 1, \dots, 1) \in \bar{G}_i \text{ آنگاه}$$

$$y^x = x^{-1}yx = (g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1})(1, \dots, 1, g, 1, \dots, 1)(g_1, \dots, g_n)$$

$$= (1, \dots, 1, g_i^{-1}gg_i, 1, \dots, 1) \in \bar{G}_i$$

بنابراین $\bar{G}_i \triangleleft G$.

برای اثبات (آ)، (ب) و (پ) تابع

$$f: G_i \rightarrow G$$

را با ضابطه $f(y) = (1, \dots, 1, y, 1, \dots, 1)$ تعریف می‌کنیم که y مؤلفه i ام n تائی مرتب

است. f یک همریختی است (تحقیق کنید) و نیز

$$\text{Im} f = \bar{G}_i \text{ و } \text{Ker} f = \{1\}.$$

و براساس قضیه اول یکرختی، $G_i \cong \bar{G}_i$.



دانشگاه شهیدریگان

پرویس شهیدرجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

ادامه برهان



برای اثبات (ب) فرض کنیم $x = (g_1, \dots, g_n) \in G$ عضو دلخواهی باشد داریم:
$$x = (g_1, 1, \dots, 1)(1, g_2, 1, \dots, 1) \dots (1, \dots, 1, g_i, 1, \dots, 1) \dots (1, \dots, 1, g_n)$$

پس، $x \in \bar{G}_1 \bar{G}_2 \dots \bar{G}_n$.

بالاخره فرض کنیم (ب) برقرار نباشد و $x \neq (1, 1, \dots, 1)$ ای موجود باشد که $x \in \bar{G}_i$ و
 $x \in \bar{G}_1 \dots \bar{G}_{i-1} \bar{G}_{i+1} \dots \bar{G}_n$. به ازای هر $z \neq i$ ، مؤلفه z ام x مساوی ۱ خواهد بود (زیرا
 $x \in \bar{G}_1$) و نیز مؤلفه i ام x مساوی ۱ است (تعریفهای $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_{i-1}, \bar{G}_{i+1}, \dots, \bar{G}_n$ ملاحظه
شود) پس هر مؤلفه x مساوی ۱ است که یک تناقض خواهد بود. $\square$
وجود $\bar{G}_i$ ها در قضیه بالا ثابت شد ولی منحصر بفرد نیستند مثال زیر دو دسته متمایز از زیر
گروههای نرمال برای یک گروه حاصلضرب مستقیم را نشان می دهد.

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی

مثال

مثال ۸۱. اگر $G_1 = C_2 = \langle a \rangle$ و $G_2 = C_2 = \langle b \rangle$ ، زیرگروههای نرمالی مانند H و K از گروه $G = G_1 \times G_2$ بیابید که $H \cap K = \{1\}$ ، $G = HK$ ، $H \cong G_1$ و $K \cong G_2$.

جواب



جواب. به روش قضیه فوق عمل کرده و خواهیم داشت:

$$H_1 = \{(1, 1), (a, 1)\}, K_1 = \{(1, 1), (1, b), (1, b^2), (1, b^3)\}$$

و تحقیق برقراری شرایط و احکام قضیه ۲.۶.۱ آسان است.

همچنین می توان زیرگروههای زیر را با توجه به $b^4 = 1$ ، به قرار زیر ساخت:

$$H_2 = \{(1, 1), (a, b^2)\}, K_2 = \{(1, 1), (a, b), (1, b^2), (a, b^3)\}$$

تحقیق شرایط $H_2 \cap K_2 = \{1\}$ و $G = H_2 K_2$ و نیز نرمال بودن H_2 در G_1 و K_2 در G_2

به آسانی امکان پذیر است. برای تحقیق $H_2 \cong G_1$ و $K_2 \cong G_2$ نیز ملاحظه می شود که H_2 یک

گروه از مرتبه ۲ بوده و لذا دوری است و نیز گروه K_2 از مرتبه ۴ است و نیز به وسیله (a, b)

تولید می شود زیرا

$$(a, b)^2 = (a^2, b^2) = (1, b^2)$$

$$(a, b)^3 = (a^3, b^3) = (a, b^3)$$

پس K_2 دوری است یعنی $K_2 \cong G_2$.





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی

قضیه

۳.۶.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه و $G_1, \dots, G_n$ زیرگروهائی از G باشند که

$$G_i \triangleleft G \quad (i = 1, \dots, n) \quad G = G_1 G_2 \dots G_n \quad \text{و نیز به ازای هر } i, \\ G_i \cap (G_1 G_2 \dots G_{i-1} G_{i+1} \dots G_n) = \{1\}. \quad G \cong \prod_{i=1}^n G_i \quad \text{در این صورت}$$

برهان

برهان. اگر $x \in G$ عضو دلخواهی باشد آنگاه $x = g_1 g_2 \dots g_n$ که $g_i \in G_i$ (با توجه به فرض $G = G_1 \dots G_n$). نسبت $\varphi: G \rightarrow \prod_{i=1}^n G_i$ را با ضابطه $\varphi(x) = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ تعریف می‌کنیم.

اولاً φ خوشتعریف است زیرا اگر $g_1 g_2 \dots g_n = h_1 h_2 \dots h_n$ که در آن $h_i \in G_i$ نشان می‌دهیم که $g_i = h_i$. برای این منظور ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $i \neq j$ آنگاه $g_i g_j = g_j g_i$. داریم:

$$g_i^{-1} g_j^{-1} g_i g_j = g_i^{-1} (g_j^{-1} g_i g_j) \in G_i G_i = G_i \\ = (g_i^{-1} g_j^{-1} g_i) g_j \in G_j G_j = G_j$$

که با توجه به فرض $G_i \cap (G_1 \dots G_{i-1} G_{i+1} \dots G_n) = \{1\}$ نتیجه می‌شود $g_i^{-1} g_j^{-1} g_i g_j = 1$ و یا

$g_i g_j = g_j g_i$. به همین ترتیب، $h_i h_j = h_j h_i$. و از رابطه $g_1 \dots g_n = h_1 \dots h_n$ نتیجه می‌شود:



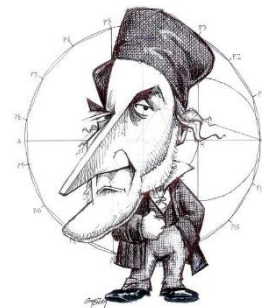


دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

ادامه برهان



$$g_i h_i^{-1} = (g_1^{-1} h_1)(g_2^{-1} h_2) \dots (g_{i-1}^{-1} h_{i-1})(g_{i+1}^{-1} h_{i+1}) \dots (g_n^{-1} h_n)$$

طرف راست عضوی از $G_1 G_2 \dots G_{i-1} G_{i+1} \dots G_n$ است و طرف چپ عضوی از G_i می باشد و

لزوماً رابطه $g_i h_i^{-1} = 1$ (به ازای هر i) حاصل می شود. بنابراین $\varphi(g_1 \dots g_n) = \varphi(h_1 h_2 \dots h_n)$.

ثانیاً φ یک همریختی است و با توجه به فرض $G = G_1 \dots G_n$ ، φ پوشا بوده و نیز

$$\text{Ker } \varphi = \{1\}. \text{ بنابراین } G \cong \prod_{i=1}^n G_i. \quad \square$$

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی

مثال

مثال ۸۲. زیر گروه دوری $\langle a \rangle = C_6$ مفروض است. نشان دهید زیر گروه‌هایی مانند H_1 و H_2 از C_6 وجود دارد که $C_6 \cong H_1 \times H_2$.

جواب



جواب. زیر گروه‌های $H_1 = \langle a^3 \rangle = \{1, a^3\}$ و $H_2 = \langle a^2 \rangle = \{1, a^2, a^4\}$ را در نظر گرفته و احکام زیر را تحقیق می‌کنیم:

$$H_1, H_2 \triangleleft C_6,$$

$$C_6 = H_1 H_2,$$

$$H_1 \cap H_2 = \{1\}.$$

از اینکه C_6 آبلی است پس هر زیر گروه آن نرمال خواهد بود. همچنین داریم:

$$a = a^3 a^4 \in H_1 H_2$$

لذا، $H_1 H_2 < C_6$ و $C_6 < H_1 H_2$ — نیز بدیهی است یعنی، $C_6 = H_1 H_2$. رابطه

$$H_1 \cap H_2 = \{1\} \text{ نیز واضح است. پس } C_6 \cong H_1 \times H_2.$$

البته از اینکه $C_2 \cong H_1$ و $C_3 \cong H_2$ بنابراین $C_6 \cong C_2 \times C_3$.



دانشگاه گیلان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی

تعریف



۴.۶.۱ تعریف. گروه G را تجزیه پذیر نامیم اگر دو گروه نابدیهی مانند G_1 و G_2 وجود داشته باشد که $G \cong G_1 \times G_2$. و اگر چنین گروههایی یافت نشود G را تجزیه ناپذیر می نامیم. تجزیه پذیری گروههای آبدلی و تجزیه ناپذیری برخی از گروهها را ضمن مثالهای زیر توضیح داده و سپس به بیان و اثبات قضایای مهم این قسمت خواهیم پرداخت.

مثال

مثال ۸۳. نشان دهید C_6 تجزیه پذیر است.

جواب



جواب. ملاحظه کردیم که C_6 زیر گروههایی یکریخت با C_2 و C_3 دارد و $C_6 \cong C_2 \times C_3$.

مثال ۸۴. گروه دوری نامتناهی که در اینجا آنرا به C_∞ نشان می دهیم، تجزیه ناپذیر است.

جواب. فرض کنیم $C_\infty = \langle a \rangle$. اگر C_∞ تجزیه پذیر باشد زیر گروههایی مانند H و K دارد

که $C_\infty \cong H \times K$. بنابراین اعدادی طبیعی مانند m و n یافت می شود که $H = \langle a^m \rangle$ و

$K = \langle a^n \rangle$. بدیهی است که $a^{mn} \in H$ و $a^{mn} \in K$ ، لذا $a^{mn} \in H \cap K \neq \{1\}$. و C_∞ نمی تواند

به صورت حاصلضرب مستقیم گروههای نابدیهی باشد.



دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی

مثال

جواب

قضیه

برهان



مثال ۸۵. نشان دهید C_p و S_p تجزیه ناپذیرند.

جواب. با توجه به زیرگروههای C_p تجزیه ناپذیری آن بدیهی است (تحقیق کنید). و در مورد S_p توجه می‌کنیم که زیرگروههای آن از مرتبه ۲ یا ۳ خواهند بود که با C_p یا C_p یکریختند. بنابراین اگر S_p تجزیه پذیر باشد با $C_p \times C_p$ یکریخت خواهد بود ولی S_p غیرآبلی است در صورتی که $C_p \times C_p$ آبلی است پس، S_p تجزیه ناپذیر است.

۵.۶.۱ قضیه. گروه دوری C_n تجزیه ناپذیر است اگر و فقط اگر n به صورت توانی از یک عدد اول باشد. به علاوه، $C_{mn} \cong C_m \times C_n$ اگر و فقط اگر $(m, n) = 1$.

برهان. فرض کنیم $C_n = \langle a \rangle$ و $n = p^\alpha$. اگر H و K زیرگروههای نرمالی از C_n باشند آنگاه $H = \langle a^{p^{\alpha_1}} \rangle$ و $K = \langle a^{p^{\alpha_2}} \rangle$ که در آن $\alpha_1 \leq \alpha$ و $\alpha_2 \leq \alpha$. اگر $\alpha_1 \leq \alpha_2$ آنگاه $K \leq H$ و اگر $\alpha_2 \leq \alpha_1$ آنگاه $H \leq K$. بنابراین، $H \cap K \neq \{1\}$ ، و C_n تجزیه ناپذیر خواهد شد. برهان لزوم شرط را پس از اثبات قسمت دوم قضیه خواهیم آورد. فرض کنیم $(m, n) = 1$ ، $C_m = \langle a \rangle$





دانشگاه شهیدرسانیان

پرویس شهیدرجانی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

ادامه برهان



و $C_n = \langle b \rangle$. بدیهی است که $|C_m \times C_n| = mn$ ، پس برای اثبات $C_{mn} \cong C_m \times C_n$ کافی است نشان دهیم که $C_m \times C_n$ دوری است (زیرا C_{mn} نیز دارای mn عضو است).

فرض کنیم t مرتبه (a, b) باشد پس $a^t = b^t = 1$ و لذا $m \mid t$ و $n \mid t$ ، که با توجه به شرط $(m, n) = 1$ نتیجه می شود $mn \mid t$. از سوی دیگر زیرگروه $\langle (a, b) \rangle$ از $C_m \times C_n$ از مرتبه t خواهد بود و براساس قضیه لاگرانژ $t \mid mn$. بنابراین $t = mn$. یعنی $C_m \times C_n$ دوری بوده و (a, b) مولد آن است.

بالعکس فرض کنیم $C_m \times C_n$ دوری باشد ولی عدد اولی مانند p ، m و n را عاد کند. در این صورت $C_m \times C_n$ دارای زیرگروه $C_p \times C_p \cong \langle a^{\frac{m}{p}} \rangle \times \langle b^{\frac{n}{p}} \rangle$ خواهد بود. ولی $C_p \times C_p$ دوری نیست زیرا عضوی از مرتبه p^2 ندارد. با این تناقض نتیجه می شود که $(m, n) = 1$.

برای اثبات لزوم شرط مربوط به قسمت اول قضیه گوئیم اگر C_n تجزیه ناپذیر بوده ولی n به صورت توانی از یک عدد اول نباشد آنگاه به صورت $n = k_1 k_2$ خواهد بود که $(k_1, k_2) = 1$. و براساس قسمت دوم قضیه، C_n تجزیه پذیر است. با این تناقض حکم ثابت می شود. $\square$

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه گیلان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی

قضیه

۶.۶.۱ قضیه. هر گروه دوری متناهی با یک حاصلضرب مستقیم از گروههای دوری از مرتبههای توانهای اعداد اول متمایز یکریخت است.

برهان

برهان. اگر $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ که p_i ها اعداد اول متمایزی هستند آنگاه با تکرار قضیه ۵.۶.۱ نتیجه می شود:

$$C_n \cong C_{p_1^{\alpha_1}} \times C_{p_2^{\alpha_2}} \times \dots \times C_{p_k^{\alpha_k}} . \quad \square$$

با این قضیه که تجزیه گروه دوری را بیان می کند می توان به تجزیه گروههای آبلی متناهی به گروههای دوری و در حالت کلی به تجزیه گروههای آبلی متناهیاً تولید شده اقدام کرد. ابتدا به ذکر مثالهایی می پردازیم.





دانشگاه اراک

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی

مثال

مثال ۸۶. اگر هر عضو a ($a \neq e$) از گروه متناهی G دارای مرتبه ۲ باشد آنگاه n ای هست که
 $|G| = 2^n$ و

$$G = \underbrace{C_2 \times C_2 \times \dots \times C_2}_{n \text{ مرتبه}}$$

جواب



جواب. اگر $a, b \in G$ ، آنگاه $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1} = ba$ (زیرا همواره $x = x^{-1}$). حال اگر
 $a_1 \in G$ ، $a_1 \neq e$ عضو دلخواهی باشد دو حالت وجود دارد:

حالت ۱. $\langle a_1 \rangle = G$ و حکم برقرار است.

حالت ۲. $\langle a_1 \rangle = H_1$ زیر گروه سره G است. در این حالت $a_2 \in G$ ای وجود دارد که
 $a_2 \notin \langle a_1 \rangle$. قرار می دهیم $H_2 = \langle a_2 \rangle$ پس $H_1 H_2 \cong H_1 \times H_2$.

حال اگر $G = H_1 \times H_2$ حکم بدیهی است در غیر این صورت با ادامه این روش زیر
 گروههای دوری $H_1, H_2, \dots, H_n$ ای بدست خواهد آمد که

$$G = H_1 H_2 \dots H_n \cong H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n.$$

بدیهی است که $|G| = 2^n$ زیرا به ازای هر i ، $H_i \cong C_2$.





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی

مثال

جواب

مثال

جواب



مثال ۸۷. اگر G گروهی از مرتبه ۴ باشد $G \cong C_4$ یا $G \cong C_2 \times C_2$.

جواب. اگر G دوری نباشد براساس قضیه لاگرانژ عضوی مانند a از مرتبه ۲ دارد و نیز عضوی مانند b خواهد داشت که لزوماً از مرتبه ۲ بوده و $G \cong \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ و یا $G \cong C_2 \times C_2$.

مثال ۸۸. p و q دو عدد اول متمایز و G گروهی از مرتبه pq است. اگر G دارای زیرگروههای نرمالی مانند H و K به ترتیب از مراتب p و q باشد آنگاه G دوری است.

جواب. فرض کنیم $H = \langle h \rangle$ و $K = \langle k \rangle$. اولاً، $H \cap K = \{e\}$. زیرا در غیر این صورت $a \neq e$ ای وجود دارد که به H و به K تعلق داشته و $a^p = a^q = e$ ، و از اینجا $a = e$ نتیجه می شود. ثانیاً با توجه به نرمال بودن H و K در G رابطه $hk = kh$ به دست خواهد آمد. بنابراین، $(hk)^{pq} = e$ و HK یک گروه دوری از مرتبه pq خواهد بود که $G = HK \cong H \times K$ را نتیجه می دهد. پس G دوری است.





دانشگاه شهید رجایی

پردیس شهید رجایی ارومیه

پردیس علامه طباطبائی ارومیه

پایان جلسه نهم

درس جبر (۱)

جلسه نهم

مدرس: دکتر غلامی

