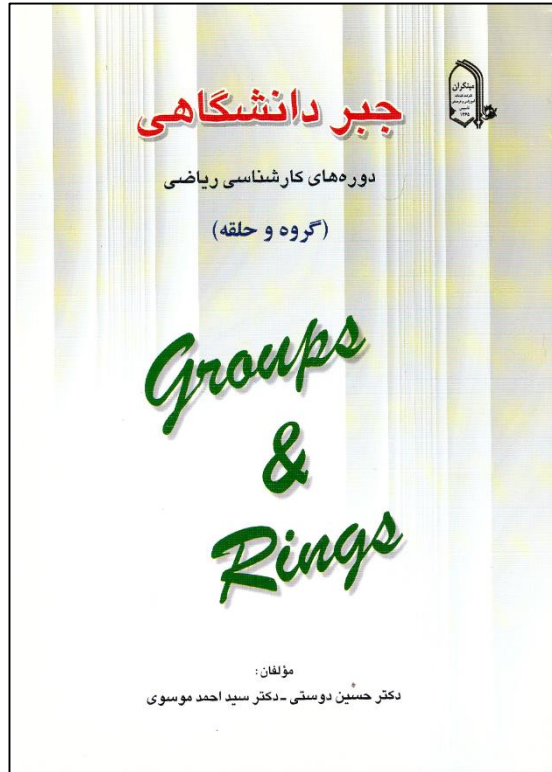


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



درس جبر ۱

جلسه دوازدهم

مباحث : تمرینات فصل اول



دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه هشتم

مدرس : دکتر غلامی





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

تمرینات

۸.۱ تمرینات فصل اول

۱. ثابت کنید گروه $(Q, +)$ دوری نیست.
۲. نشان دهید هر زیر گروه گروه $(Z, +)$ به شکل kZ ($k \in N$) است.
۳. با استفاده از گروههای $(Q, +)$ و $(Z, +)$ گروهی بسازید که به ازای هر عدد طبیعی k زیر گروهی از مرتبه k داشته باشد.
۴. x و y دو عضو از گروه مفروض G بوده و با هم تعویضپذیرند اگر $o(x)$ و $o(y)$ نسبت بهم متباین باشند نشان دهید $o(xy) = o(x) o(y)$.
۵. با استفاده از نیمگروه $(Z_n, \odot)$ نشان دهید که اگر a و n دو عدد طبیعی و نسبت بهم متباین باشند آنگاه $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
۶. با استفاده از گروه $(Z_n^*, \odot)$ نشان دهید که به ازای هر عدد اول p همواره $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
۷. G یک گروه، $a, b \in G$ و r عددی است طبیعی که $ab^{r-1} = b^r$. نشان دهید به ازای هر عدد صحیح m و هر عدد طبیعی n ، $a^n b^m a^{-n} = b^{mr^n}$.
۸. با استفاده از مولد گروهها، $Aut(D_4)$ ، $Aut(D_6)$ و $Aut(D_8)$ را محاسبه کنید.
۹. زیر گروه نرمالی از گروه $G = D_6$ ارائه داده و سپس دامنه و برد همریختی طبیعی متناظر را بیابید.

درس جبر (۱)

جلسه هشتم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

تمرینات

۱۰. اگر G یک گروه غیر دوری و آبلی باشد نشان دهید $\text{Aut}(G)$ غیر آبلی است.
۱۱. ثابت کنید A_4 تنها زیرگروه S_4 از مرتبه ۱۲ است.
۱۲. نشان دهید S_n با ترانهش‌های $(1n), \dots, (13), (12)$ تولید می‌شود.
۱۳. نشان دهید S_n با ترانهش‌های $(n-1, n), \dots, (i, i+1), \dots, (12)$ تولید می‌شود.
۱۴. نشان دهید S_n با $(1 \ 2 \ \dots \ n-1)$ و $(n \ n-1)$ تولید می‌شود.
۱۵. اگر $C_G(x)$ مرکز ساز x در گروه G باشد نشان دهید که به ازای هر $x, a \in G$ ،

$$C_G(axa^{-1}) = aC_G(x)a^{-1}.$$
۱۶. ثابت کنید به ازای هر $n \geq 3$ مرکز S_n بدیهی است. همچنین به ازای هر $n \geq 4$ مرکز A_n بدیهی است. و مرکزهای S_3 و A_3 را محاسبه کنید.
۱۷. اگر عضو x در گروه دلخواه G دارای k مزدوج و به ازای n ای مفروض x^n دارای m مزدوج باشد با استفاده از $C_G(x) \leq C_G(x^n)$ نشان دهید $k \mid m$.
۱۸. اگر H زیرگروهی نرمال از گروه G بوده و $|G:H| = n$ آنگاه به ازای هر $y \in G, y^n \in H$.
 (تعمیم مثال ۴۰). با ارائه مثالی نشان دهید که اگر H نرمال نباشد حکم برقرار نیست.
۱۹. اگر زیرگروه H از S_n دارای جایگشتی فرد باشد آنگاه $|H|$ عددی زوج است و دقیقاً نصف اعضای H جایگشت فرد خواهند بود.
۲۰. به ازای هر n نشان دهید منومورفیزی (همریختی یک به یک) از S_n به A_{n+2} وجود دارد. و به ازای $n \geq 2$ ، چنین منومورفیزی از S_n به A_{n+1} موجود نیست.

درس جبر (۱)

جلسه هشتم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه شهید رجایی

پروفسور شهید رجایی ارومیه

پروفسور علامه طباطبائی ارومیه

تمرینات

۲۱. G یک گروه و H زیرگروهی با اندیس ۲ است. اگر $x \in H$ دارای n مزدوج در G باشد آنگاه x دارای n یا $\frac{n}{2}$ مزدوج در H خواهد بود (راهنمایی: از $C_G(x) \cap H = C_G(H)$ و از مثال ۴۱ و قضیه ۱.۲۳.۴.۱ استفاده کنید).

۲۲. G یک گروه آبلی و $\alpha: H \rightarrow G$ و $\beta: K \rightarrow G$ همریختی هستند. ثابت کنید یک همریختی مانند $\gamma: H \times K \rightarrow G$ وجود دارد که α و β را توسعه می‌دهد. به عبارت دیگر $\gamma(h, 1) = \alpha(h)$ و $\gamma(1, k) = \beta(k)$ به ازای هر $h \in H$ و $k \in K$ برقرار است. آیا آبلی بودن G در وجود γ مؤثر است؟

۲۳. اگر H زیرگروهی از گروه G باشد آنگاه $N_G(aHa^{-1}) = a N_G(H) a^{-1}$.

۲۴. اگر H و K زیرگروههای گروه G بوده و $H \subseteq K$ آنگاه

$$N_K(H) = N_G(H) \cap K.$$

۲۵. نشان دهید $Z(G_1 \times G_2) \simeq Z(G_1) \times Z(G_2)$ و آن را تعمیم دهید.

۲۶. اگر σ جایگشتی از گروه S_n باشد نشان دهید $C_{S_n}(\sigma) = \langle \sigma \rangle$.

۲۷. اگر σ جایگشتی از گروه S_n باشد نشان دهید $C_{S_n}(\sigma) = \langle \sigma \rangle$.

درس جبر (۱)

جلسه هشتم

مدرس: دکتر غلامی

