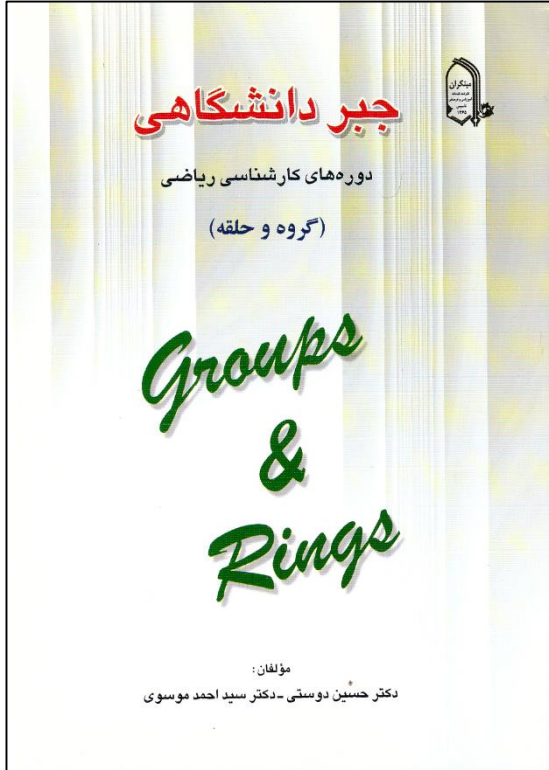


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



درس جبر ۱

جلسه سوم

مباحث: زیر گروه و گروه دوری



دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه گیلان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

تعریف



۱.۳.۱ تعریف. G یک گروه است. زیر مجموعهٔ ناتهی H از G را یک زیر گروه G می نامیم اگر H با عمل تعریف شده در G یک گروه باشد. علامت $H < G$ به همین معنی به کار می رود. اگر e عضو همانی گروه G باشد $\{e\}$ و G زیر گروه های گروه G خواهند بود و آنها را زیر گروه های بدیهی می نامیم و زیر گروه H از G که $H \neq \{e\}$ و $H \neq G$ ، زیر گروه سره نامیده می شود.

قضیه

۲.۳.۱ قضیه. زیر مجموعهٔ ناتهی H از گروه G یک زیر گروه است اگر و فقط اگر به ازای هر $a, b \in H$ ، $ab^{-1} \in H$.

برهان



برهان. (لزوم شرط): اگر H یک زیر گروه G بوده و $a, b \in H$ اعضای دلخواهی باشند آنگاه براساس تعریف، $b^{-1} \in H$ و لذا، $ab^{-1} \in H$.
(کفایت شرط): فرض کنیم $ab^{-1} \in H$ به ازای هر a و b متعلق به H برقرار باشد لذا $aa^{-1} \in H$ ولی، $e = aa^{-1} \in G$ ، پس، H شامل عضو همانی e می باشد. از سوی دیگر، در $ab^{-1} \in H$ (که به ازای هر a و b از H برقرار است) قرار می دهیم $a = e$. بنابراین، به ازای هر $b \in H$ ، $b^{-1} \in H$ یعنی H یک گروه است و لذا زیر گروه خواهد بود. $\square$



دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

قضیه

۳.۳.۱ قضیه. G یک گروه و H یک زیر مجموعه ناتهی و متناهی G است. در این صورت H زیر گروه است اگر و فقط اگر نسبت به عمل ضرب تعریف شده در G ، بسته باشد.

برهان

برهان. اگر H زیر گروه باشد، بسته بودن آن نسبت به عمل ضرب بدیهی است. بالعکس، اگر H نسبت به عمل ضرب بسته باشد H یک نیمگروه متناهی خواهد بود. از اینکه G یک گروه است پس قوانین حذف به ازای همه اعضای آن و در نتیجه برای همه اعضای H برقرار خواهد بود. و گروه بودن H از قضیه ۱۰.۱.۱ نتیجه می شود. $\square$



مثال

مثال ۲۵. به ازای هر عدد طبیعی k زیر مجموعه $kZ = \{kn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ زیر گروه $(\mathbb{Z}, +)$ است.

جواب

جواب. در تحقیق قضیه ۲.۳.۱ فرض کنیم kn_1 و $kn_2 \in kZ$. بنابراین:

$$kn_1 - kn_2 = k(n_1 - n_2) = km \in kZ.$$





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

مثال

مثال ۲۶. مجموعه $GL(n, R)$ متشکل از ماتریسهای معکوسپذیر $n \times n$ با درایه‌های متعلق به R با عمل ضرب ماتریسها یک گروه است. نشان دهید زیر مجموعه $SL(n, R)$ از $GL(n, R)$ متشکل از ماتریسهای A که $\det A = 1$ ، یک زیر گروه است.

جواب

جواب. اگر $A, B \in SL(n, R)$ آنگاه

$$\det(AB^{-1}) = (\det A)(\det B^{-1}) = \det A \det B = 1 \times 1 = 1.$$

لذا، $AB^{-1} \in SL(n, R)$.

تعریف

۴.۳.۱ تعریف. G یک گروه است. مرکز G که به علامت $Z(G)$ نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G (gx = xg)\}.$$

خواص ساده و مهم $Z(G)$ را در مثال زیر ملاحظه می‌کنیم.





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی



مثال

مثال ۲۷. به ازای هر گروه G ، $Z(G)$ زیرگروه G است. به علاوه، گروه G آبلی است اگر و فقط اگر $G = Z(G)$.

جواب



جواب. عضو همانی G به $Z(G)$ تعلق دارد لذا $Z(G) \neq \emptyset$. فرض کنیم h و k دو عضو دلخواه از $Z(G)$ باشند. نشان می‌دهیم که به ازای هر $g \in G$ ، $(hk^{-1})g = g(hk^{-1})$ داریم. $gh = hg$ و $gk = kg$ و لذا، $gk^{-1} = k^{-1}g$ و

$$(hk^{-1})g = h(k^{-1}g) = h(gk^{-1}) = (hg)k^{-1} = (gh)k^{-1} = g(hk^{-1}).$$

برای اثبات قسمت دوم سؤال ملاحظه می‌کنیم که رابطه $Z(G) \subseteq G$ همواره برقرار است و نیز اگر G آبلی بوده و $a \in G$ عضو دلخواهی باشد آنگاه به ازای هر $b \in G$ ، $ab = ba$. پس، $a \in Z(G)$ ، یعنی $G \subseteq Z(G)$ و تساوی $G = Z(G)$ را خواهیم داشت.



دانشگاه گیلان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

قضیه

۵.۳.۱ قضیه. اشتراک هر تعداد از زیر گروههای یک گروه، زیر گروه است ولی اجتماع دو زیر گروه، زیر گروه است اگر و فقط اگر یکی از آنها زیر مجموعه دیگری باشد.

برهان



برهان. اگر $H = \bigcap_{K \in C} K$ و C گردایه‌ای از زیر گروههای گروه مفروض G باشد ناتهی بودن H بدیهی است و به آسانی از $a, b \in H$ رابطه $ab^{-1} \in H$ نتیجه می‌شود، یعنی H زیر گروه G است. حال فرض کنیم A و B دو زیر گروه G بوده ولی $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq A$. بنابراین $a \in A - B$ ای و $b \in B - A$ ای وجود دارد و لذا، $a, b \in A \cup B$. پس، $ab \in A \cup B$. اگر $ab \in A$ آنگاه $b = a^{-1}ab \in A$ که یک تناقض است و اگر $ab \in B$ آنگاه $a \in B$ که باز هم یک تناقض خواهد بود پس $A \cup B$ یک زیر گروه است اگر و فقط اگر $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$. $\square$



دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

قضیه

۶.۳.۱ قضیه. اگر $\varphi : G \rightarrow H$ یک همریختی گروهی باشد $\text{Im} \varphi$ زیر گروه H و $\text{Ker} \varphi$ زیر گروه G است.

برهان

برهان. با توجه به اینکه $\varphi(e_1) = e_2$ ، زیر مجموعه‌های $\text{Im} \varphi$ و $\text{Ker} \varphi$ ناتهی خواهند بود e_1 و e_2 به ترتیب اعضای همانی G و H هستند. و اثبات زیر گروه بودن آنها با استفاده از تعریف امکان پذیر است. $\square$



تعریف

اگر H و K دو زیر مجموعه گروهی مانند G باشند، HK چنین تعریف می شود:

$$HK = \{ab \mid a \in H, b \in K\}$$

عمل ضرب ab همان عمل ضرب گروه است.





دانشگاه گیلان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

قضیه

۷.۳.۱ قضیه. G یک گروه، و H و K دو زیر گروه G هستند. HK زیر گروه است اگر و فقط اگر $HK = KH$.

برهان



برهان. اگر e عضو همانی G باشد آنگاه $e = ee \in HK$ پس HK ناتهی است. فرض کنیم $HK = KH$. اگر $a, b \in HK$ آنگاه

$$\exists h_1, h_2 \in H, \exists k_1, k_2 \in K (a = h_1 k_1, b = h_2 k_2)$$

و داریم:

$$ab^{-1} = h_1 k_1 (h_2 k_2)^{-1} = h_1 k_1 k_2^{-1} h_2^{-1} = h_1 k_3 h_2^{-1}, (k_3 = k_1 k_2^{-1}).$$

چون $k_3 h_2^{-1} \in KH$ ، پس $k_3 h_2^{-1} \in HK$ ، لذا،

$$\exists h_3 \in H, k_4 \in K (k_3 h_2^{-1} = h_3 k_4).$$

بنابراین،

$$ab^{-1} = h_1 h_3 k_4 = h_4 k_4 \in HK, (h_4 = h_1 h_3),$$

و HK زیر گروه G است.





دانشگاه گیلان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

تعریف



۸.۳.۱ تعریف. S زیر مجموعه‌ای از گروه G است. زیرگروه تولید شده به وسیله S که به علامت $\langle S \rangle$ نشان داده می‌شود عبارت است از اشتراک همه زیرگروه‌های G که شامل S هستند. زیرگروه بودن $\langle S \rangle$ براساس ۵.۳.۱ واضح است و بدیهی است که $\langle S \rangle$ کوچکترین زیرگروهی از G است که شامل S می‌باشد. اگر S تهی باشد آنگاه $\langle S \rangle = \{e\}$ و اگر S ناتهی باشد قضیه زیر $\langle S \rangle$ و اعضای آن را مشخص می‌کند.

قضیه

۹.۳.۱ قضیه. اگر S زیر مجموعه ناتهی گروه G باشد آنگاه $\langle S \rangle$ متشکل از اعضائی به صورت $x = x_1 x_2 \dots x_n$ است که به ازای هر i ($i = 1, \dots, n$) $x_i \in S$ یا $x_i^{-1} \in S$.
(به ازای $n = 0$ ، x را مساوی e یعنی عضو همانی گروه G تعریف می‌کنیم).

اثبات قضیه در اسلاید بعدی →

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه فرہنگیان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

برهان



برهان. مجموعه K را چنین تعریف می‌کنیم:

$$K = \{x_1 x_2 \dots x_n \mid n = 0, 1, 2, \dots, (x_i \in S \text{ یا } x_i^{-1} \in S, i = 1, \dots, n)\}.$$

K یک زیرگروه G است زیرا اگر $x = x_1 x_2 \dots x_n$ و $y = y_1 y_2 \dots y_m$ دو عضو دلخواه K باشند آنگاه:

$$xy^{-1} = x_1 x_2 \dots x_n y_m^{-1} y_{m-1}^{-1} \dots y_2^{-1} y_1^{-1} \in K$$

و براساس تعریف $\langle S \rangle$ نتیجه می‌شود که $\langle S \rangle \subseteq K$. برای اثبات $K \subseteq \langle S \rangle$ ملاحظه می‌کنیم که $\langle S \rangle = \bigcap \{ H < G \mid S \subseteq H \}$ اگر H یک زیرگروه دلخواه G بوده و شامل S باشد آنگاه H شامل

معکوس هر عضو S نیز خواهد بود. بنابراین اگر $x = x_1 \dots x_n$ عضو دلخواهی از K باشد $x_i \in S$ یا $x_i^{-1} \in S$ ، پس $x \in H$ و لذا، x به اشتراک همهٔ چنین H هائی تعلق داشته و به $\langle S \rangle$ متعلق خواهد بود، یعنی $K \subseteq \langle S \rangle$. در نتیجه $\langle S \rangle = K$. $\square$

تعاریف «مولد یک گروه»، «گروه متناهیاً تولید شده» و «گروه دوری» که ذیلاً به آنها می‌پردازیم نتایج قضیه ۹.۳.۱ می‌باشند.

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه گیلان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی



تعریف



۱۰.۳.۱ تعریف. زیر مجموعهٔ ناتهی S از گروه G را مولد G می‌نامیم اگر $\langle S \rangle = G$. اگر S یک مجموعهٔ متناهی باشد G را متناهیاً تولید شده می‌نامیم. G را گروه دوری می‌نامیم اگر $S = \{a\}$.

با توجه به قضیه ۹.۳.۱ خواهیم داشت:

$$\langle a \rangle = \{a^{\pm n} \mid n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

به عنوان مثال در گروه $(\mathbb{Z}, +)$ زیر گروه دوری $\langle 7 \rangle$ چنین خواهد شد:

$$\langle 7 \rangle = \{0, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \dots\}.$$

لازم به یادآوری است که این زیر گروه را قبلاً به علامت $7\mathbb{Z}$ نیز نشان داده‌ایم.



دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

قضیه

۱۱.۳.۱ قضیه. G یک گروه و a عضو دلخواهی از آن است، در این صورت:

(آ). اگر به ازای $n \in \mathbb{Z}$ ای $(n \neq 0)$ ، $a^n = e$ آنگاه $o(a)$ وجود دارد و n را عاد می‌کند؛

(ب). زیرگروه دوری $\langle a \rangle$ از مرتبه m است اگر و فقط اگر $o(a) = m$.

برهان



برهان. (آ). از $a^n = e$ رابطه $a^{-n} = e$ نتیجه شده و لذا مجموعه $\{k \mid k \in \mathbb{N}, a^k = e\}$ ناتهی است و بنابراین خوشترتیبی اعداد طبیعی دارای ابتدا خواهد بود فرض کنیم m ابتدای آن باشد. بنابر تعریف مرتبه یک عضو، عدد m مرتبه a می‌باشد.

اعداد صحیحی نظیر q و r وجود دارد که $n = mq + r$ و $0 \leq r < m$. در نتیجه:

$$e = a^n = a^{mq} \cdot a^r = a^r.$$

و لزوماً $r = 0$. یعنی $m \mid n$.

(ب). فرض کنیم $o(a) = m$. اعضای $e, a, a^2, \dots, a^{m-1}$ دو به دو متمایزند (چرا؟). $\langle a \rangle$ را

در نظر می‌گیریم. هر عضو آن به صورت a^k خواهد بود ($k \in \mathbb{Z}$). با تقسیم k بر m خواهیم داشت

$k = mq_1 + r_1$ که $0 \leq r_1 < m$. بنابراین، $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{m-1}\}$ و $\langle a \rangle$ از مرتبه m است.





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی



مثال

مثال ۱.۲۸. اگر G یک گروه متناهی باشد نشان دهید عددی طبیعی مانند m وجود دارد که به ازای هر $a \in G$ ، $a^m = e$.

جواب

جواب. اگر $x \in G$ عضو دلخواهی باشد $\langle x \rangle$ متناهی و از مرتبه $o(x)$ خواهد بود. پس m را کوچکترین مضرب مشترک همه $o(x)$ ها ($x \in G$) در نظر می گیریم.





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

قضیه

برهان



۱۲.۳.۱ قضیه. هر گروه دوری با $(\mathbb{Z}, +)$ و یا به ازای $n \in \mathbb{N}$ ای با $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ یکرخت است.

برهان. اگر گروه $G = \langle a \rangle$ دوری و نامتناهی باشد نگاشت

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow G$$

با ضابطه $\varphi(k) = a^k$ یکبیک و پوشاست (چرا؟) و همریختی بودن آن بدیهی است. بنابراین G با $\mathbb{Z}$ یکرخت است.

و اگر $G = \langle a \rangle$ متناهی باشد بنابر ۱۱.۳.۱ ای وجود دارد که $n = o(a)$ و $G = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$. گروه $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ و اعضای آنرا در نظر گرفته و نگاشت $\xi : (\mathbb{Z}_n, \oplus) \rightarrow G$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\xi(i) = a^i$$

ξ یک یکرختی است (چرا؟). بنابراین G و $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ یکرخت هستند. $\square$





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

نتیجه (۱)

۱۳.۳.۱ نتیجه. هر دو گروه دوری نامتناهی یکریختند و نیز هر دو گروه دوری متناهی از یک مرتبه، یکریختند.

نتیجه (۲)

۱۴.۳.۱ نتیجه. هر زیر گروه یک گروه دوری، دوری است.

برهان



برهان. فرض کنیم $G = \langle a \rangle$ یک گروه دوری و H زیر گروهی از آن باشد. اگر $H = \{e\}$ یا $H = G$ ، حکم بدیهی است. بنابراین فرض می‌کنیم H یک زیر گروه سره G باشد و در این صورت عدد صحیحی مانند $i \neq 0$ وجود دارد که $a^i \in H$ و لذا، $a^{-i} \in H$.

فرض کنیم n کوچکترین عدد مثبتی باشد که $a^n \in H$. قرار می‌دهیم $b = a^n$ و نشان می‌دهیم که $H = \langle b \rangle$. اگر $a^j \in H$ عضو دلخواهی باشد j را بر n تقسیم می‌کنیم. لذا،

$r, q \in \mathbb{Z}$ ای وجود دارند که $j = nq + r$ و $0 \leq r < n$ و

$$a^j = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = b^q \cdot a^r \in H.$$

که با توجه به تعریف n نتیجه می‌شود $r = 0$ یعنی $a^j = b^q$. $\square$



دانشگاه اصفهان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

قضیه

برهان



درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

۱۵.۳.۱ قضیه. اگر G یک گروه دوری متناهی باشد آنگاه G به ازای هر مقسوم علیه مثبت d از $|G|$ دقیقاً یک زیرگروه از مرتبه d دارد.

برهان. فرض کنیم $G = \langle a \rangle$ و $o(a) = n$. اگر d مقسوم علیه مثبتی از n باشد کافی است حکم را به ازای $1 < d < n$ ثابت کنیم. قرار می دهیم $d' = \frac{n}{d}$. بنابراین $H = \langle a^{d'} \rangle$ یک زیر گروه دوری G و از مرتبه d خواهد بود. فرض کنیم $x = a^{d'}$.
برای اثبات یکتائی فرض کنیم K زیرگروه دوری دلخواهی از G و از مرتبه d باشد. بنابر قضیه قبل عدد صحیح مثبتی مانند d'' وجود دارد که $K = \langle a^{d''} \rangle$ و d'' کوچکترین عددی است که $a^{d''} \in K$. پس $a^{dd''} = e$ و چون $a^n = a^{dd'} = e$ ، پس $n = dd''$. اگر قرار دهیم $y = a^{d''}$ آنگاه $y = a^{\frac{n}{d}} = a^{d'} = x$ پس $H = K$.





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

قضیه

۱۶.۳.۱ قضیه. $G = \langle a \rangle$ یک گروه دوری متناهی و از مرتبه n است. در این صورت عضوی نظیر $b \in G$ یک مولد G است اگر و فقط اگر عدد صحیحی نظیر r یافت شود که با n متباین بوده و $b = a^r$.

برهان



برهان (کفایت شرط). فرض کنیم $b \in G$ عضوی باشد که به ازای عدد صحیحی نظیر r ، $b = a^r$ و $(r, n) = 1$. اولاً، α و β ای یافت می شود (اعداد صحیح) که $\alpha r + \beta n = 1$ بنابراین $a^{r\alpha} = b^\alpha$ و $a^{n\beta} = 1$ و $a = a^{r\alpha}$. لذا، هر عضو G به صورت توانی از b خواهد بود. ثانیاً، مرتبه b مساوی n است زیرا $b^n = a^{rn} = e$ و اگر $m < n$ ای یافت شود که $b^m = e$ آنگاه $a^{rm} = e$ و لازم است n عدد rm را عاد کند که با توجه به $(r, n) = 1$ باید $n | m$ یعنی $n \leq m$ ، که یک تناقض است. پس، $G = \langle b \rangle$.

(لزوم شرط). فرض کنیم عضوی نظیر $b \in G$ مولد G باشد یعنی $G = \langle a \rangle = \langle b \rangle$ و $a^n = e$. پس، r ای وجود دارد که $b = a^r$. اگر $d = (n, r)$ و $d \neq 1$ آنگاه اعداد صحیحی نظیر α و β وجود دارد که $\alpha n + \beta r = d$ و $a^\beta = (a^r)^\beta = b^\beta$ و $a^\alpha = a^{n\alpha} = e$. در نتیجه، $a^d \in \langle b \rangle$. از سوی دیگر، r_1 ای وجود دارد که $r = r_1 d$ و $b = a^{r_1 d} = (a^d)^{r_1}$.

ادامه اثبات در اسلاید بعدی





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

ادامه برهان

پس، $b \in \langle a^d \rangle$. بنابراین $\langle b \rangle = \langle a^d \rangle$. و این یک تناقض است زیرا $n_1 < n$ ای وجود دارد که $n = n_1 d$ و $\langle a^d \rangle$ از مرتبه n_1 خواهد شد در صورتی که $\langle b \rangle$ از مرتبه n است. با این تناقض فرض خلف یعنی $1 \neq d$ باطل است و لزوماً $d = 1$ برقرار خواهد بود. $\square$

تعریف



۱۷.۳.۱ تعریف. حاصلضرب مستقیم دو گروه $(G_1, *)$ و (G_2, o) گروه متشکل از اعضای مجموعه $G_1 \times G_2$ با عمل ضرب

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 o b_2)$$

می باشد که $e = (e_1, e_2)$ عضو همانی آن است.

بررسی حاصلضرب مستقیم زیر گروه های یک گروه و قضایای مهم آن را به بخش ۶.۱ موکول می کنیم و در اینجا مثالی از حاصلضرب مستقیم گروه های دوری را می آوریم.



دانشگاه شهیدریگان

پرویس شهیدرجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی



مثال

مثال ۲۹. اگر $G_1 = \langle a \rangle$ و $G_2 = \langle b \rangle$ دو گروه دوری به ترتیب از مرتبه‌های m و n باشند
آنگاه $G_1 \times G_2$ نیز گروه دوری و از مرتبه mn است در صورتی که $(m, n) = 1$.

جواب

جواب. اگر مرتبه $(a, b) \in G_1 \times G_2$ مساوی d باشد آنگاه $d \mid mn$ زیرا:

$$(a, b)^{mn} = (a^{mn}, b^{mn}) = ((a^m)^n, (b^n)^m) = (e_1, e_2) = e.$$

همچنین اگر $d < mn$ و $(a, b)^d = e$ آنگاه $a^d = e_1$ و $b^d = e_2$ لذا $d \mid m$ و $d \mid n$. بنابراین،
 $mn \mid d$ (با توجه به فرض $(m, n) = 1$ ، پس، $mn = d$).

از اینکه a و b به ترتیب مولدهای G_1 و G_2 هستند، (a, b) مولد $G_1 \times G_2$ خواهد بود، یعنی
 $\langle (a, b) \rangle = G_1 \times G_2$ و با توجه به ۱۱.۳.۱- (ب)، گروه دوری از مرتبه mn
می‌باشد.



مثال

مثال ۳۰. هر گروه دوری نامتناهی دقیقاً دو مولد دارد.

جواب

جواب. براساس ۱۲.۳.۱ هر گروه دوری نامتناهی با گروه $(\mathbb{Z}, +)$ یکریخت است و ۱ و -۱
مولدهای $\mathbb{Z}$ هستند و بدیهی است که $\mathbb{Z}$ مولد دیگری به غیر از ۱ و -۱ ندارد.



دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

مثال

جواب



مثال ۳۱. هر گروه دوری متناهی از مرتبه n دقیقاً $\phi(n)$ عدد مولد دارد. $\phi(n)$ تعداد اعداد کوچکتر از n و متباین با آن است (تابع اویلر).

جواب. براساس ۱۲.۳.۱ هر گروه دوری متناهی از مرتبه n با $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ یکرخت است. اعضای $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ را به $0, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$ نشان می‌دهیم تا نقش عمل $\oplus$ کاملاً بر روی اعضای گروه مشخص شود. لذا اگر $\bar{m}$ یک مولد دلخواه $\mathbb{Z}_n$ باشد از اینکه $\bar{a}$ نیز مولد $\mathbb{Z}_n$ است لازم می‌آید k ای وجود داشته باشد (عدد صحیح) که $\bar{a} = k\bar{m}$ و براساس تعریف $\oplus$ ، اعداد صحیحی نظیر r و s یافت می‌شود که $nr = k(m - ns)$ و یا $1 - km = nq$ پس $(m, n) = 1$ و تعداد چنین m ها دقیقاً برابر $\phi(n)$ خواهد بود.

مثال زیر کاربرد ساده‌ای از قضایای ۱۵.۳.۱ و ۱۶.۳.۱ است. در نمایش زیر گروه یک گروه، علامت نمایشی هسی را به صورت



به کار می‌بریم که نشان دهنده زیر گروه بودن H می‌باشد.



دانشگاه فریهکیان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

مثال

جواب



مثال ۳۲. زیر گروههای گروه دوری $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus)$ را پیدا کنید.

جواب. $\mathbb{Z}_{12}$ با ۱ تولید می شود و مقسوم علیه های ۱۲ عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲. بنابراین فقط ۶ زیر گروه دوری وجود دارد که بترتیب از مرتبه های ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ هستند. برای مشخص کردن زیر گروهها ابتدا مولدهای $\mathbb{Z}_{12}$ را پیدا می کنیم. هر مولد $\mathbb{Z}_{12}$ به صورت $1 \times r$ است که $(r, 12) = 1$ یعنی،
 $r = 1, 5, 7, 11.$

لذا،

$$\mathbb{Z}_{12} = \langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 11 \rangle.$$

حال، بقیه اعضا یعنی ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۲ را در نظر گرفته و زیر گروههای تولید شده را بررسی می کنیم. خواهیم داشت:

$$\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\};$$

$$\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\};$$

$$\langle 4 \rangle = \{0, 4, 8\};$$

$$\langle 6 \rangle = \{0, 6\};$$

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی



$$\langle 8 \rangle = \{0, 8, 4\};$$

$$\langle 9 \rangle = \{0, 9, 6, 3\};$$

$$\langle 10 \rangle = \{0, 10, 8, 6, 4, 2\};$$

$$\langle 12 \rangle = \{0\}.$$

بنابراین، ۶ زیرگروه $\mathbb{Z}_{12}$ عبارتند از:

$$\mathbb{Z}_{12} = \langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 11 \rangle$$

$$\langle 2 \rangle = \langle 10 \rangle$$

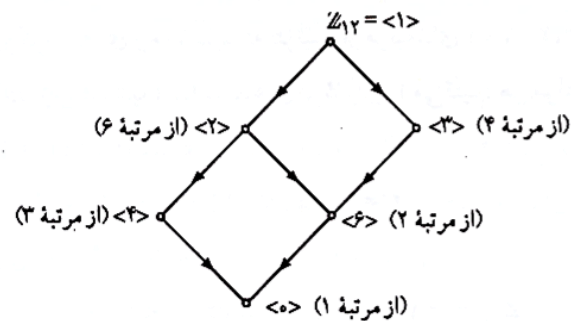
$$\langle 3 \rangle = \langle 9 \rangle$$

$$\langle 4 \rangle = \langle 8 \rangle$$

$$\langle 6 \rangle$$

$$\langle 0 \rangle$$

که به ترتیب از مرتبه ۱۲، ۶، ۴، ۳، ۲، ۱ هستند. نمایش هسی مربوطه نیز چنین خواهد شد:



ادامه جواب



دانشگاه فریهکنیان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه فریهکیان

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

مثال

جواب



مثال ۳۳. زیر گروههای $(\mathbb{Z}_{14}, \oplus)$ را مشخص کنید.

جواب. این گروه فقط چهار زیر گروه به ترتیب از مراتب ۱، ۲، ۷ و ۱۴ دارد. هر مولد $\mathbb{Z}_{14}$ نیز به صورت $1 \times r$ است که $(r, 14) = 1$ پس، $r = 1, 3, 5, 9, 11, 13$. با اجرای روشی مشابه با مثال قبل خواهیم داشت:

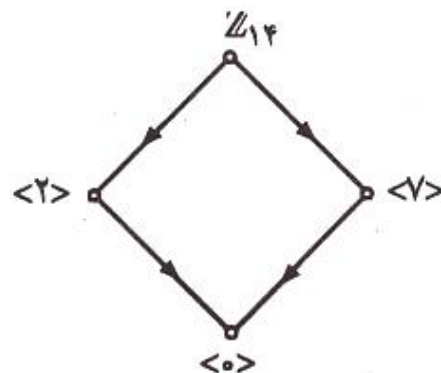
$$\mathbb{Z}_{14} = \langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle = \langle 9 \rangle = \langle 11 \rangle = \langle 13 \rangle$$

$$\langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle = \langle 6 \rangle = \langle 8 \rangle = \langle 10 \rangle = \langle 12 \rangle$$

$$\langle 7 \rangle$$

$$\langle 0 \rangle$$

که به ترتیب از مرتبه ۱۴، ۷، ۲ و ۱ هستند و نمایش هسی چنین خواهد بود:





دانشگاه شهید رجایی

پردیس شهید رجایی ارومیه

پردیس علامه طباطبائی ارومیه

پایان جلسه سوم

درس جبر (۱)

جلسه سوم

مدرس: دکتر غلامی

