

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

درس جبر ۱

جلسه دهم

مبحث : حاصل ضرب مستقیم گروه‌ها (قسمت دوم)



دانشگاه شهیدریگان

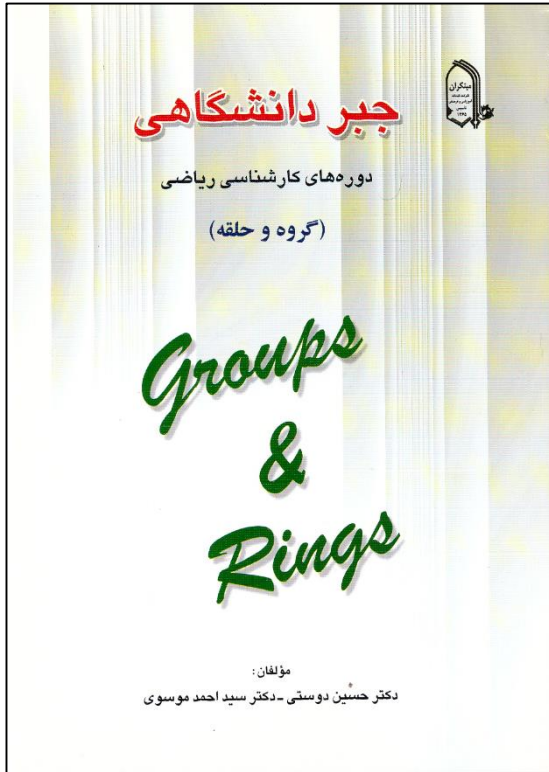
پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس : دکتر غلامی





دانشگاه شهیدریگان

پرویس شهیدرجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس: دکتر غلامی

قضیه

۷.۶.۱ قضیه. $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ یک گروه آبلی و $b = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$ که α_i ها اعداد صحیح هستند که بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها مساوی ۱ است. در این صورت، اعضای مانند $b_1, b_2, \dots, b_n \in G$ وجود دارد که $G = \langle b, b_2, \dots, b_n \rangle$.

برهان



برهان. اگر $n = 1$ ، G دوری است و حکم برقرار است. اگر $n = 2$ آنگاه اعداد صحیحی مانند x_1 و x_2 وجود دارد که $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 1$. عضو b_2 را به صورت

$$b_2 = a_1^{x_2} \cdot a_2^{-x_1}$$

تعریف می کنیم. برای اثبات $G = \langle b, b_2 \rangle$ کافی است نشان دهیم که $a_1, a_2 \in \langle b, b_2 \rangle$. از آبلی بودن G نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} = a_1^{\alpha_1 x_1} \cdot a_1^{\alpha_2 x_2} \\ &= a_1^{\alpha_1 x_1} \cdot a_2^{\alpha_2 x_1} a_1^{\alpha_2 x_2} \cdot a_2^{-\alpha_2 x_1} \\ &= (a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2})^{x_1} \cdot (a_1^{x_2} a_2^{-x_1})^{\alpha_2} \\ &= b^{x_1} \cdot b_2^{\alpha_2} \in \langle b, b_2 \rangle, \end{aligned}$$

ادامه اثبات در اسلاید بعدی ➡





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

ادامه برهان



درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس: دکتر غلامی

به همین ترتیب، ثابت می شود که $a_r = b^{x_r} \cdot b_r^{-\alpha_1} \in \langle b, b_r \rangle$.

حال فرض کنیم $n \geq 3$ و به استقرا عمل می کنیم. اگر $t = \text{hcf} \{a_1, \dots, a_n\}$ یعنی بزرگترین مقسوم علیه مشترک) و به ازای هر i ، $\alpha_i = \iota \beta_i$ ، آنگاه با در نظر گرفتن $a_1^{\beta_1} \dots a_{n-1}^{\beta_{n-1}}$

$b_1 = a_1^{\beta_1}$ و به فرض استقرا، اعضای $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ وجود دارد که:

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \rangle.$$

از سوی دیگر،

$$b = (a_1^{\iota \beta_1} a_2^{\iota \beta_2} \dots a_{n-1}^{\iota \beta_{n-1}}) \cdot a_n^{\alpha_n} = b_1^{\iota} a_n^{\alpha_n} \text{ و } \text{hcf} \{t, \alpha_n\} = 1,$$

و به فرض استقرا b_n ای وجود دارد که:

$$\langle b_1, a_n \rangle = \langle b, b_n \rangle.$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle &= \langle b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, a_n \rangle \\ &= \langle b, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n \rangle. \quad \square \end{aligned}$$



دانشگاه شهیدریگان

پرویس شهیدرجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس: دکتر غلامی

قضیه

برهان



۸.۶.۱ قضیه. هر گروه آبلی متناهیاً تولید شده با حاصلضرب مستقیمی از گروههای دوری یکرخت است.

برهان. فرض کنیم G یک گروه آبلی و $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه مولد آن باشد و a_1 عضوی فرض می شود که مرتبه آن کوچکتر از مراتب اعضای هر مجموعه مولد n عضوی است. اثبات حکم به استقرا روی n خواهد بود. اگر $n = 1$ ، G دوری است و حکم بالبداهه برقرار است. فرض کنیم $n \geq 2$ و H و K را چنین تعریف می کنیم:

$$H = \langle a_1 \rangle \quad \text{و} \quad K = \langle a_2, \dots, a_n \rangle.$$

براساس فرض استقرا K با حاصلضرب مستقیمی از گروههای دوری یکرخت است. اگر $K = G$ حکم برقرار است و اگر $K \neq G$ کافی است نشان دهیم که $G \cong H \times K$. در واقع شرایط قضیه ۳.۶.۱ را تحقیق می کنیم. اولاً، G آبلی است پس $H \triangleleft G$ و $K \triangleleft G$. ثانیاً، $G = HK$ با توجه به تعریف H و K نتیجه می شود. ثالثاً، اگر $x \in H \cap K$ آنگاه

$$x = a_1^{\alpha_1} = a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_n^{\alpha_n}$$

➡ ادامه اثبات در اسلاید بعدی





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

ادامه برهان



در نتیجه، $a_1^{-\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = 1$. اگر $t = \text{hcf} \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ و $\alpha_i = t\beta_i$ ($1 \leq i \leq n$) آنگاه عضو $b = a_1^{-\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n}$ دارای خاصیت $b^t = 1$ بوده و $b \in G$. براساس قضیه ۷.۶.۱ اعضای مانند $b_1, \dots, b_n$ یافت می شود که $G = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$. ولی براساس تعریف مرتبه $a_1 \neq 0$ اگر a_1 آنگاه لازم است $\alpha_1 < t$ و این یک تناقض است. بنابراین $\alpha_1 = 0$ و $x = 1$.
یعنی $H \cap K = \{1\}$. $\square$

قضیه

۹.۶.۱ قضیه. هر گروه آبلی متناهی با حاصلضرب مستقیمی از گروههای دوری با مراتب توانهایی از اعداد اول، یکرخت است.

برهان

برهان. اگر G یک گروه آبلی و متناهی باشد متناهیاً تولید شده است و براساس ۸.۶.۱ با حاصلضرب مستقیمی از گروههای دوری (که هر یک متناهی خواهند بود) یکرخت می باشد. هر چنین گروه دوری نیز براساس ۶.۶.۱ با حاصلضرب مستقیمی از گروههای دوری با توانهایی از اعداد اول متمایز، یکرخت می باشد. $\square$

درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه اراک

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

تذکر

مثال

جواب



درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس: دکتر غلامی



تذکر. شرط «متناهیاً تولید شده» در گروه آبلی برای تجزیه آن به حاصلضربی از گروههای دوری شرطی اساسی است. در این مورد به مثال زیر توجه نمائید

مثال ۸۹. نشان دهید گروه آبلی $(Q, +)$ تجزیه ناپذیر است.

جواب. اگر H و K دو زیرگروه نابديهی Q بوده و $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ به ترتیب اعضای ناصفري از H و K باشند آنگاه

$$ac = bc \times \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}}_{bc \text{ مرتبه}} \in H,$$

$$ac = ad \times \frac{c}{d} = \underbrace{\frac{c}{d} + \frac{c}{d} + \dots + \frac{c}{d}}_{ad \text{ مرتبه}} \in K.$$

در نتیجه، $H \cap K \neq \{0\}$ و Q تجزیه ناپذیر است.



دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس: دکتر غلامی

تعریف

۱۰.۶.۱ تعریف. گروه متناهیاً تولید شده و آبلی G را یک گروه آبلی آزاد می نامیم اگر با حاصلضرب مستقیمی از گروههای دوری نامتناهی یکریخت باشد.

قضیه

۱۱.۶.۱ قضیه. هر گروه آبلی متناهیاً تولید شده با یک گروه خارج قسمتی گروهی متناهیاً تولید شده آزاد، یکریخت است.

برهان

برهان. اگر G یک گروه آبلی متناهیاً تولید شده باشد براساس ۸.۶.۱،

$$G \cong G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$$

که G_i ها دوری هستند. فرض کنیم $G_i = \langle a_i \rangle$ ، $(1 \leq i \leq n)$. همچنین فرض کنیم F_n گروه آبلی متناهیاً تولید شده آزاد باشد که

$$F_n \cong \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \dots \times \langle b_n \rangle$$



➡ ادامه اثبات در اسلاید بعدی



دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

ادامه برهان



و به ازای هر i ، $\langle b_i \rangle = C_\infty$. نگاشت $\theta : F_n \rightarrow G$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\theta(b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots b_n^{\alpha_n}) = (a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \dots, a_n^{\alpha_n}).$$

θ یک همریختی پوشاست و با توجه به قضیه اول یکرختی،

$$\frac{F_n}{\text{Ker}\theta} \simeq G. \quad \square$$

توضیحات



درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس: دکتر غلامی

۱۲.۶.۱ محاسبه تعداد گروه‌های آبدلی از مرتبه n و غیر یکرخت (متمايز). ابتدا فرض کنیم

$n = p^\alpha$ ($\alpha > 0$) و $P(\alpha)$ تعداد افراهای عدد طبیعی α باشد که $(\alpha + 0)$ نیز به عنوان یک افراز

شمرده می‌شود. در این صورت همه گروه‌های زیر از مرتبه p^α بوده و دبدو متمایزند:

$$C_{p^{\alpha_1}} \times C_{p^{\alpha_2}} \times \dots \times C_{p^{\alpha_k}}, \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \alpha)$$



دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

مثال



مثلاً اگر $n = p^4$ باشد افرازهای عدد ۴ عبارتند از:

$$0 + 4,$$

$$1 + 3,$$

$$1 + 1 + 2,$$

$$1 + 1 + 1 + 1,$$

$$2 + 2.$$

و گروههای $C_p \times C_p \times C_p \times C_p$ ، $C_p \times C_p \times C_{p^2}$ ، $C_p \times C_{p^3}$ ، C_{p^4} و $C_{p^2} \times C_{p^2}$ همه آبلی و از مرتبه p^4 بوده و دو بدو متمایزند.

حال فرض کنیم $n = p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} \dots p^{\alpha_m}$ باشد. در این صورت تعداد گروههای آبلی از مرتبه n مساوی $P(\alpha_1) P(\alpha_2) \dots P(\alpha_m)$ خواهد بود.

درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس: دکتر غلامی



مثال

جواب

مثال ۹۰. گروههای آبدی مرتبه ۶۰ (متمایز) را پیدا کنید.

جواب. داریم $۶۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵$ ، بنابراین $P(۱) P(۱) P(۲)$ عدد گروه متمایز خواهیم داشت. به عبارت دیگر $۲ = ۲ \times ۱ \times ۱$ عدد گروه آبدی از مرتبه ۶۰ وجود دارد که عبارتند از:

$$C_۲ \times C_۳ \times C_۵ \cong C_{۶۰}, \quad C_۲ \times C_۲ \times C_۳ \times C_۵ \cong C_۲ \times C_{۳۰}$$

مثال

جواب

مثال ۹۱. گروههای مرتبه ۳۶۰ (متمایز) را پیدا کنید.

جواب. داریم:

$$\begin{aligned} ۳۶۰ &= ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۱, \\ P(۳) P(۲) P(۱) &= ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶, \\ C_۸ \times C_۹ \times C_۵ &\cong C_{۳۶۰}, \\ C_۸ \times C_۳ \times C_۳ \times C_۵ &\cong C_۳ \times C_{۱۲۰}, \\ C_۲ \times C_۴ \times C_۹ \times C_۵ &\cong C_۲ \times C_{۱۸۰}, \\ C_۲ \times C_۴ \times C_۳ \times C_۳ \times C_۵ &\cong C_۲ \times C_۳ \times C_{۶۰} \cong C_۶ \times C_{۶۰}, \\ C_۲ \times C_۲ \times C_۲ \times C_۹ \times C_۵ &\cong C_۲ \times C_۲ \times C_{۹۰}, \\ C_۲ \times C_۲ \times C_۲ \times C_۳ \times C_۳ \times C_۵ &\cong C_۲ \times C_۲ \times C_۳ \times C_{۳۰} \cong C_۲ \times C_۶ \times C_{۳۰}. \end{aligned}$$





دانشگاه شهید رجایی

پرویس شهید رجایی ارومیه

پرویس علامه طباطبائی ارومیه

مثال

جواب



مثال ۹۲. همه گروههای آبدی به صورت $H \times K$ را پیدا کنید که هر یک از مرتبه ۳۱۵ بوده و دبدو متمایز باشند.

جواب. $315 = 3^2 \times 5 \times 7$ و $P(2) = 2$ ، $P(1) = 1$. بنابراین ۲ گروه متمایز از مرتبه ۳۱۵ خواهیم داشت که عبارتند از:

$$G_1 = C_9 \times C_{35} \text{ و } G_2 = C_3 \times C_3 \times C_{35}.$$

ولی $C_{35} = C_5 \times C_7$ داریم:

$$G_1 = C_9 \times C_{35} = C_{15} \times C_{21}$$

درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس: دکتر غلامی





دانشگاه شهید رجایی

پردیس شهید رجایی ارومیه

پردیس علامه طباطبائی ارومیه

پایان جلسه دهم

درس جبر (۱)

جلسه دهم

مدرس: دکتر غلامی

