

ریاضی عمومی ۲

فصل چهارم

رویه ها و دیگر دستگاههای مختصات

هدفهای کلی

هدف کلی از ارائه این فصل آشنا کردن دانشجو با مفهوم رویه ، رویه های درجه دوم ورده بندی آنها و دستگاههای مختصات معروف در فضای سه بعدی است.

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید

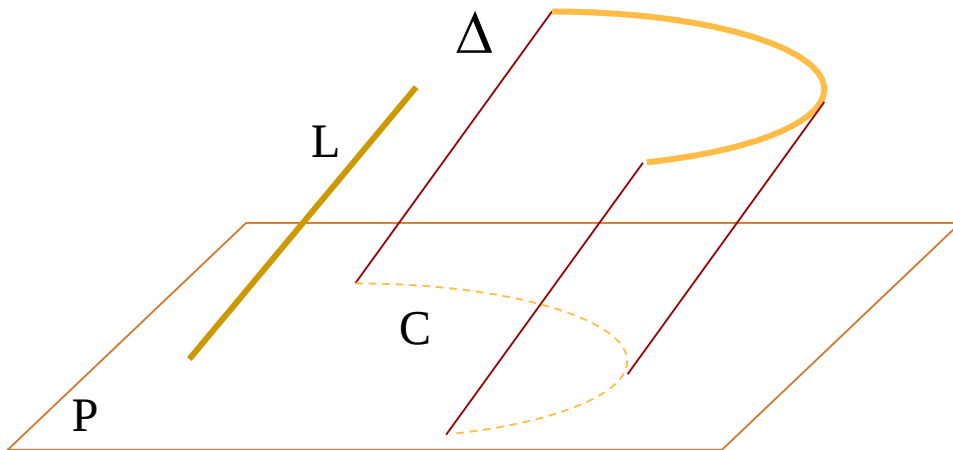
1. مفاهیم مربوط به رویه های استوانه ای و دوار را بدانند و به کار ببرند.
2. رویه های درجه دوم را با استفاده از روش های جبرخطی فصل ۳ شناسایی کند.
3. از روی معادله متعارفی درجه دوم، شکل رویه معرف آن را تشخیص دهد.
4. دستگاههای مختصات استوانه ای و کروی را بشناسد و از آنها استفاده کند.

۴.۱ رویه های استوانه های دوار

۴.۱.۱ تعریف

فرض کنید C خمی واقع بر صفحه ای چون P و L خطی ناواقع بر این صفحه است که با آن موازی نیست. خطی که متکی بر C و موازی با L حرکت کند رویه ای تولید می کند. این رویه را استوانه یا **رویه استوانه ای** می نامیم.

خم C را هادی استوانه و هر یک از خطهای موازی با L و متکی بر خم C را یک **مولد** استوانه می نامیم.



۲. ۱. ۴ مثال:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

می دانیم که معادله های

معادله های دایره به مرکز $(0, 0, 0)$ و شعاع $r = 1$ در صفحه xOy هستند. حال اگر خطی بر این دایره تکیه و موازی با محور z حرکت کند، یک استوانه قائم پدید می آورد.

معادله های پارامتری خطی از این نوع که از نقطه $(x_0, y_0, 0)$ واقع بر دایره میگذرد عبارتست از

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = t$$

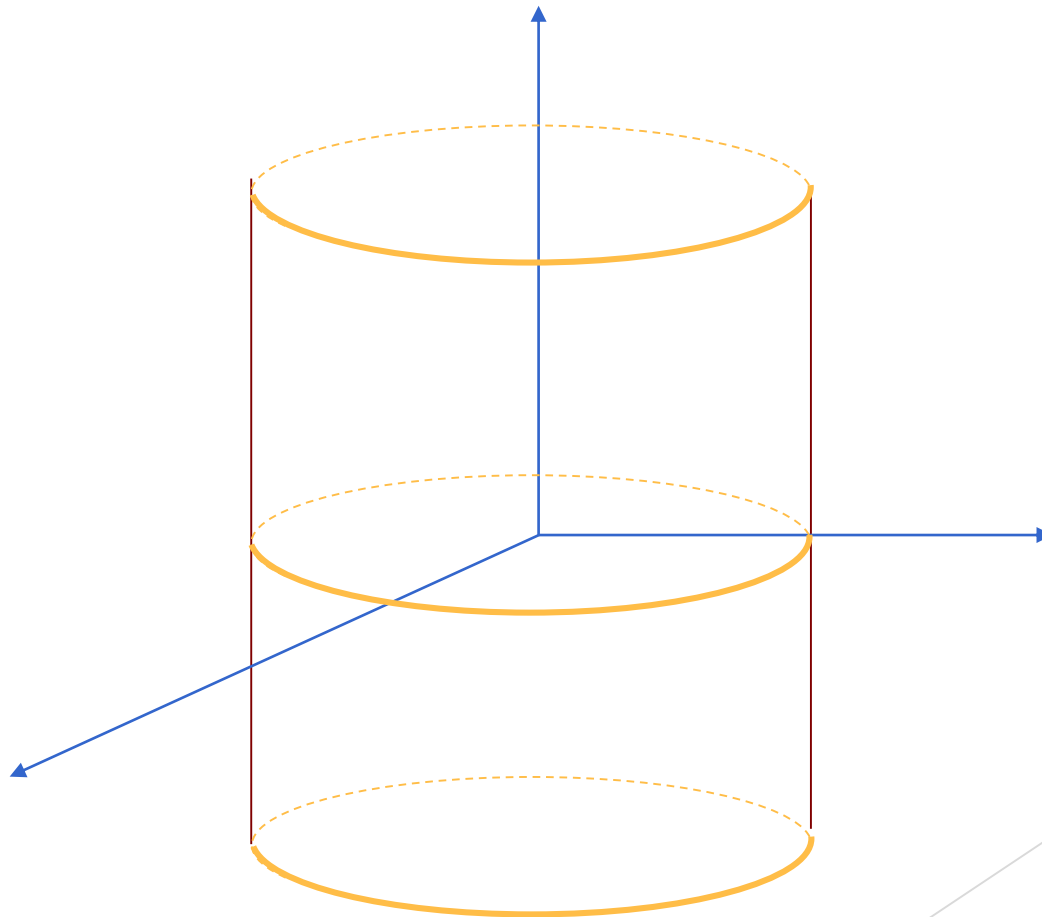
با توجه به این معادله ها می بینیم که z دلخواه است و از $-\infty$ تا $+\infty$ می تواند

تغییر کند. از این معادله ها x_0 و y_0 را حذف می کنیم و معادله زیر را بدست

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 1$$

می آوریم.

عدم وجود z در این معادله نشانه دلخواه بودن z است . بنابراین (۱) معادله مورد بحث است . در شکل زیر قسمتی از این استوانه نشان داده شده است.



۴.۱.۴ معادله استوانه

بطور کلی هر خم C در فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$ مجموعه جواب های یک دستگاه دو معادله سه مجهولی است. حال اگر این معادله هارا

$$f(x,y,z)=0 \quad \text{و} \quad g(x,y,z)$$

بنامیم آنگاه خم C را به صورت

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

نشان می دهیم.

حال فرض کنید هادی استوانه ای توسط دستگاه معادله های

$$(2) \quad C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

داده شده باشد. اگر خط D یکی از مولدهای این استوانه ای باشد، D را می توان فصل مشترک دو صفحه در نظر گرفت، یعنی

$$(3) \quad D : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \lambda \\ a_2x + b_2y + c_2z = \mu \end{cases}$$

توجه کنید که وقتی در این دستگاه λ و μ تغییر کنند خطوط موازی D حاصل می شوند.

حال فرض کنید $A(x,y,z)$ نقطه ای روی استوانه ای باشد. در این صورت λ و μ باید چنان اختیار شوند که نقطه $A(x,y,z)$ در معادله های (۳) صدق کند. از طرف دیگر به ازای این مقادیر λ و μ خط D باید خم C قطع کند، بنابراین D وز باید در نقطه ای چون $B(s,t,u)$ مشترک باشند. یعنی این نقطه باید در معادله های (۲) و (۳) به طور همزمان صدق کند، یعنی

$$\begin{cases} f(s, t, u) = 0 \\ g(s, t, u) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 s + b_1 t + c_1 u = \lambda \\ a_2 s + b_2 t + c_2 u = \mu \end{cases}$$

اکنون بین این معادله ها u, t, s را حذف می کنیم و در معادله حاصل قرار می دهیم

$$\lambda = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = \mu$$

و معادله استوانه را در نظر می گیریم.

۵. ۱. ۴ مثال:

می خواهیم معادله استوانه ای را بنویسیم که C هادی آن دارای معادله های

$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

ومولد آن موازی خط $y = z$ باشد. $x =$

حل:

$$D : \begin{cases} x - y = \lambda \\ x - z = \mu \end{cases}$$

معادله های مولد را به صورت

$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ z = 0 \\ x - y = \lambda \\ x - z = \mu \end{cases}$$

در نظر می گیریم. حال از دستگاه معادله های

x, y, z را حذف می کنیم ، نتیجه می شود .

$$x = \mu \quad , \quad y = \mu - \lambda \quad , \quad (\mu - \lambda) = 4\mu^2$$

در نتیجه معادله استوانه مورد نظر عبارتست از

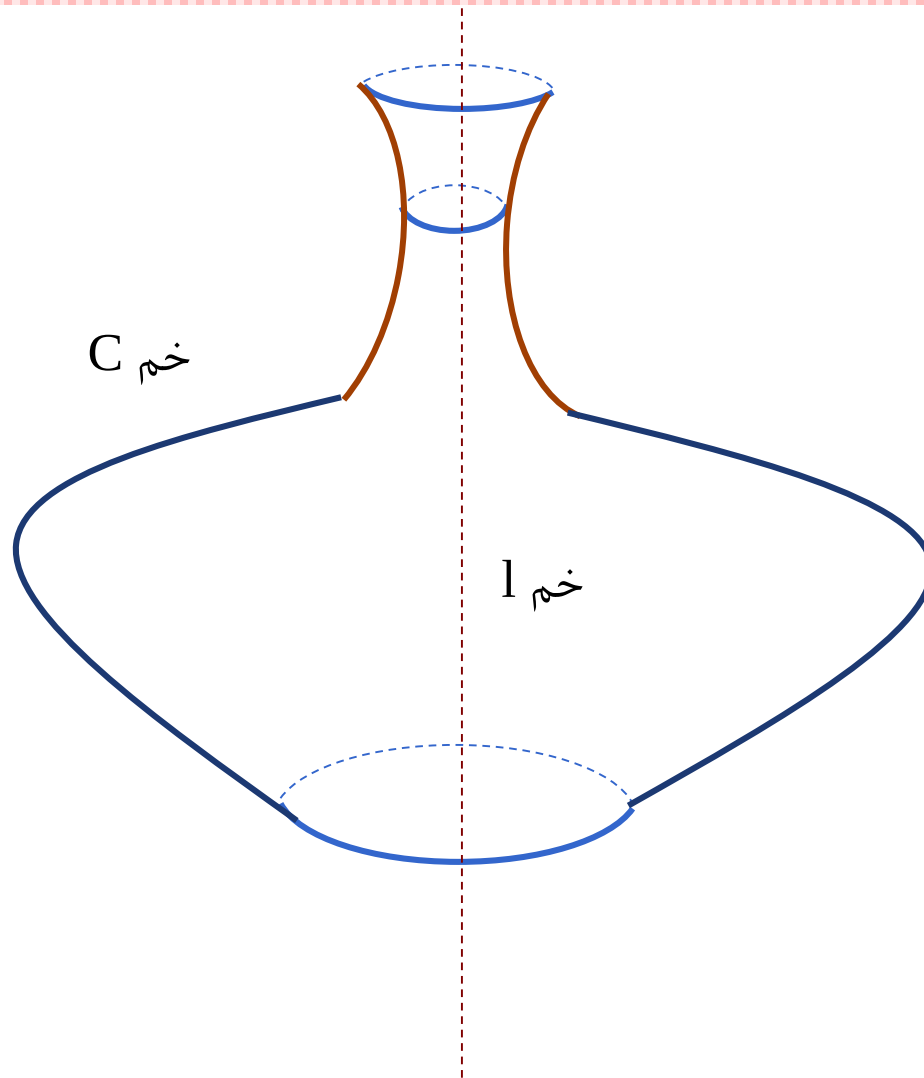
$$(x - z - x + y) = 4(x - z)^2$$

یا

$$4x^2 + 4z^2 - 8xz - y + z = 0$$

۷.۱.۴ تعریف

خم C و خط l را که هردو روی یک صفحه هستند ، در نظر می گیریم. اگر C حول l دوران کند ، رویه ای به نام **رویه دوار** حاصل می شود . خم C را یک مولد و خط l را **محور دوران** این رویه می نامیم.



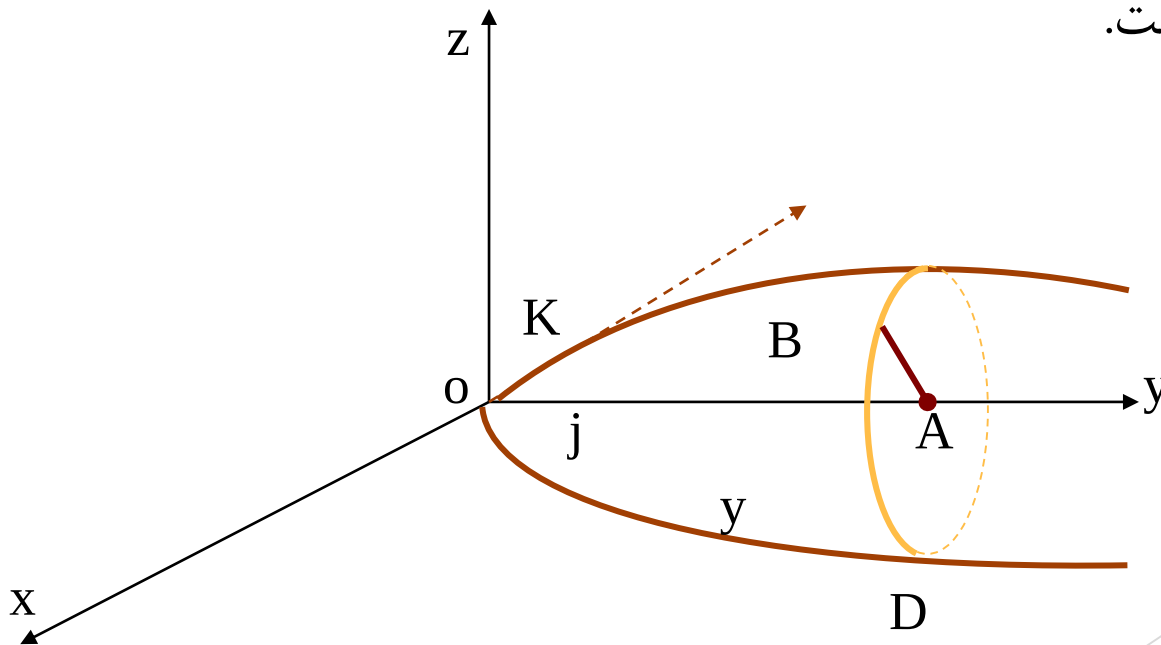
می خواهیم معادله رویه دوار ی را که از دوران خم C حول محور l پدید می آید بدست آوریم.

۸. ۱. ۴ مثال

خم $y = x^2$ حول محور y دوران می کند، معادله رویه دوار حاصل را پیدا کنید.

حل:

وقتی $y = x^2$ حول محور y دوران می کند هر نقطه اش دایره ای پدید می آورد که مرکز آن روی محور y است.



فرض کنید $B(x_1, y_1, z)$ نقطه دلخواهی روی این رویه باشد. از B صفحه عمود

بر محور دوران، محور Oy را رسم می کنیم تا رویه را در دایره ای به مرکز A

و خم C را در نقطه D قطع کند. مختصات A عبارتست از $(0, y, 0)$ اگر D دارای

مختصات $(x', y', 0)$ باشد، باید داشته باشیم.

$$y' = y, \quad y' = x'^2$$

چون فاصله D و B از نقطه A باهم برابر است، داریم:

$$\sqrt{(x' - 0)^2 + (y' - y')^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - y)^2 + (z - 0)^2}$$

واز این رو، با توجه به این رابطه و روابط (۴) معادله رویه دوار به صورت زیر حاصل

$$y = x^2 + z^2$$

می شود

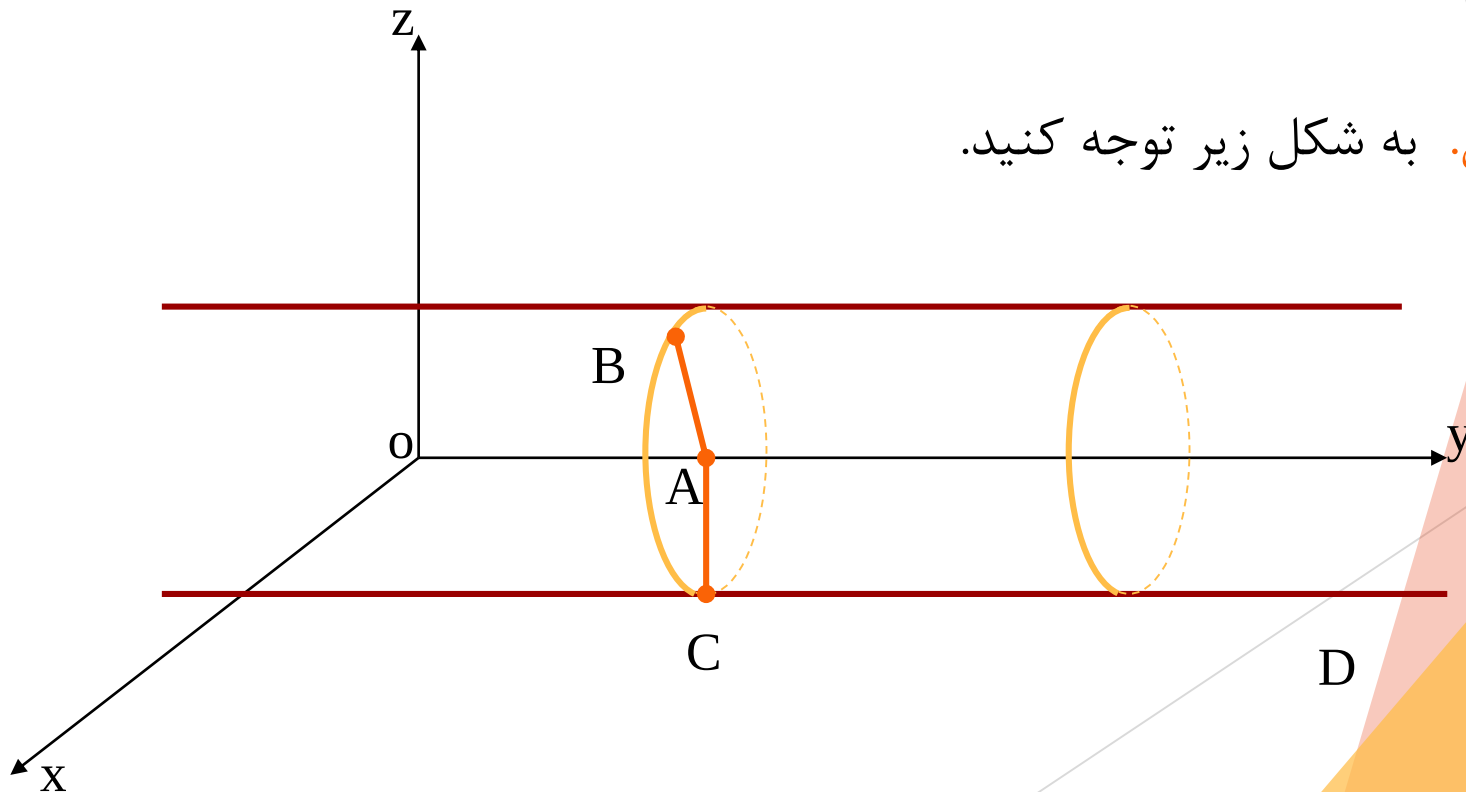
این رویه را **سه میوار دوار** می نامیم.

۱۰. ۱. ۴ مثال

فرض کنید خط D واقع بر صفحه xOy و موازی با محور y ، حول این محور دوران کند. در این صورت یک استوانه پدید می آید. می خواهیم معادله این استوانه را به دو طریق بدست آوریم.

حل:

راه حل اول. به شکل زیر توجه کنید.



فرض کنید $B(x,y,z)$ نقطه دلخواهی واقع بر استوانه باشد. این نقطه بر دایره به

مرکز $A(0,y,0)$ واقع است. این دایره خط D را که دارای معادله $x=c$ است در

نقطه $C(c,y,0)$ قطع می کند. از تساوی $AC=BC$ نتیجه می شود:

$$(c-0)^2 + (y-y)^2 + (0-0)^2 = (x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2$$

و از این رو، معادله استوانه عبارتست از

$$x^2 + z^2 = c^2$$

راه حل دوم . خط D محل تلاقی دو صفحه $x - c = 0$ و $z = 0$ است. بنابراین، هر

یک از مولدهای استوانه به صورت

$$\begin{cases} x = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

است. معادله خمی که این خط ها متکی بر آن به موازات D قرار دارند و

استوانه را می سازند عبارتست از

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = c^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

در نتیجه معادله استوانه عبارتست از

$$x^2 + z^2 = c^2$$

۴.۲ رویه های درجه دوم

اکنون که با رویه های استوانه ای و رویه های دوار آشنا شدیم، رویه هایی را معرفی می کنیم که تعمیم طبیعی خمهای درجه دوم، یعنی مقاطع مخروطی هستند. این رویه ها، رویه های درجه دوم نامیده می شوند.

❁ کره یک مثالی از یک رویه درجه دوم است.

۱. ۲. ۴ تعریف

نمودار معادله درجه دوم سه مجهولی

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad *$$

را که در آن $J, I, H, G, F, E, D, C, B, A$ اعداد ثابت و F, E, D, C, B, A همه
صفر نیستند، یک **رویه درجه دوم** می نامیم.

* به عبارت دیگر یک رویه درجه دوم مجموعه نقاطی چون (x, y, z) متعلق

به فضای سه بعدی R^3 است که در معادله * صدق می کنند.

۲.۲.۴ مثال

در معادله * قرار می دهیم

(الف) $A = B = C = 1 = -J$ و $D = E = F = G = H = I = 0$ و به دست می آوریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

مشاهده می کنیم که این معادله ، معادله کره به مرکز (۰ و ۰ و ۰) و شعاع ۱

است، بنابراین می توان ادعا کرد که برخی از رویه های دوار رویه در جه

دوم نیز هستند.

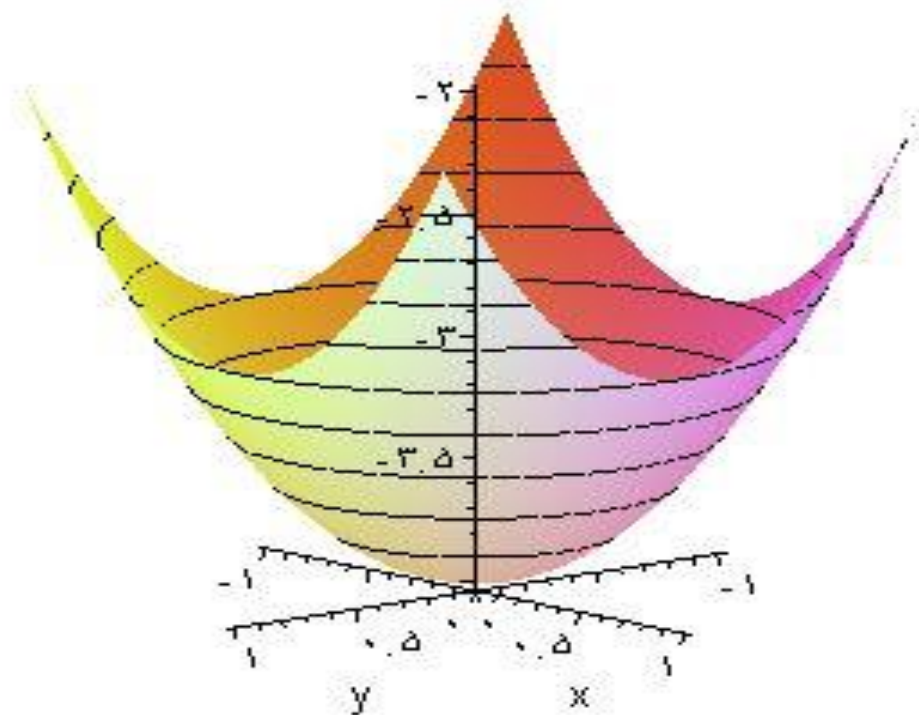
(ب) با قرار دادن $A = B = 1$ و $I = -1$ و $C = D = E = F = G = H = J = 0$ و به دست می آوریم.

$$z^2 = x^2 + y^2$$

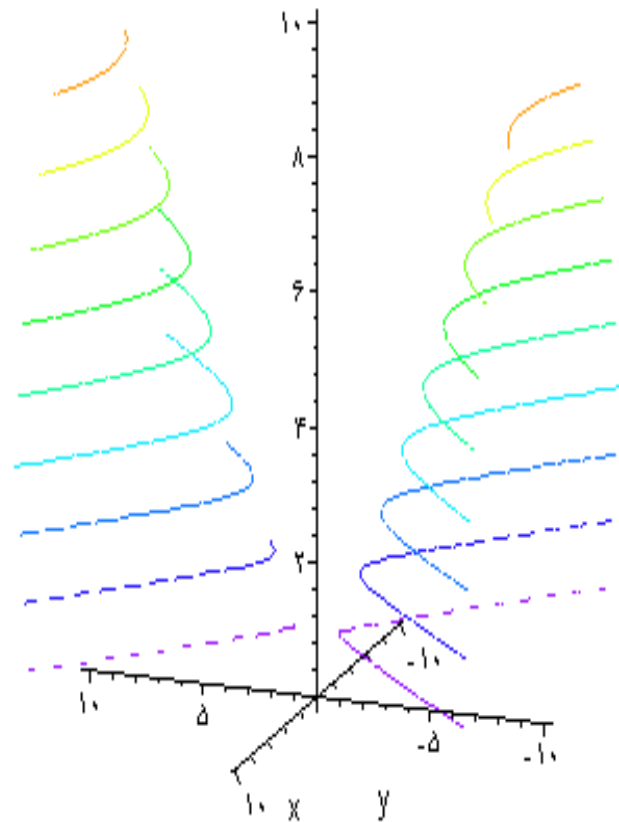
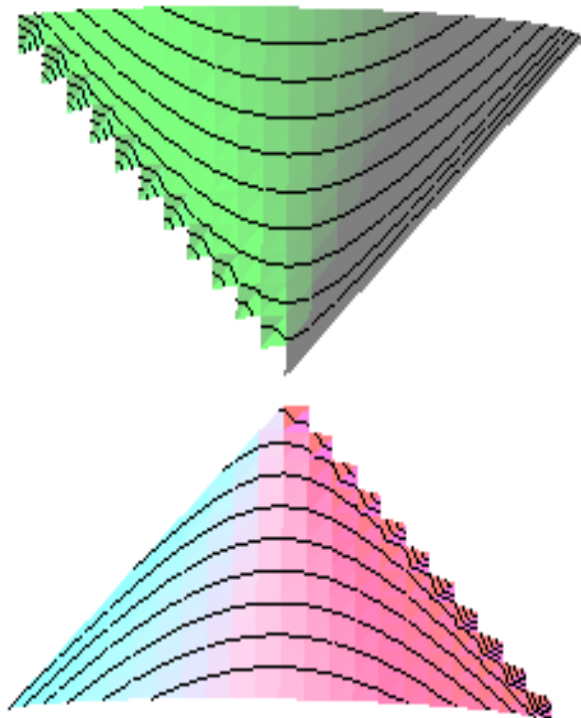
* دیدیم ، این معادله معرف سهمیوار دوار است . بنابراین سهمیوار دوار نمونه دیگری از یک رویه درجه دوم است.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

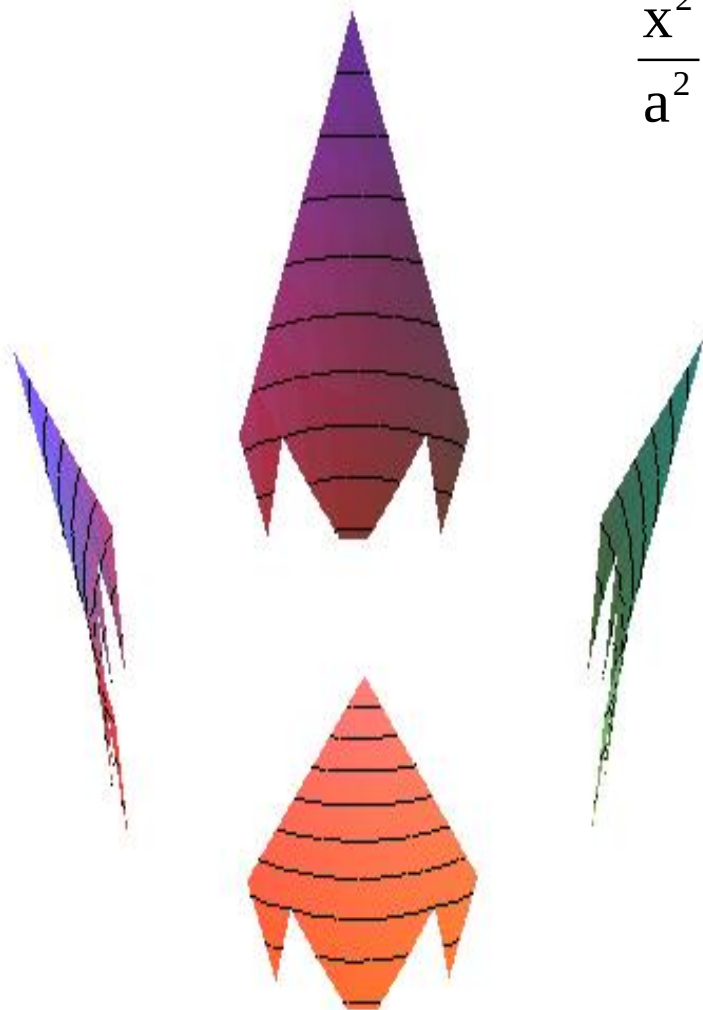
سهمیوار بیضوی



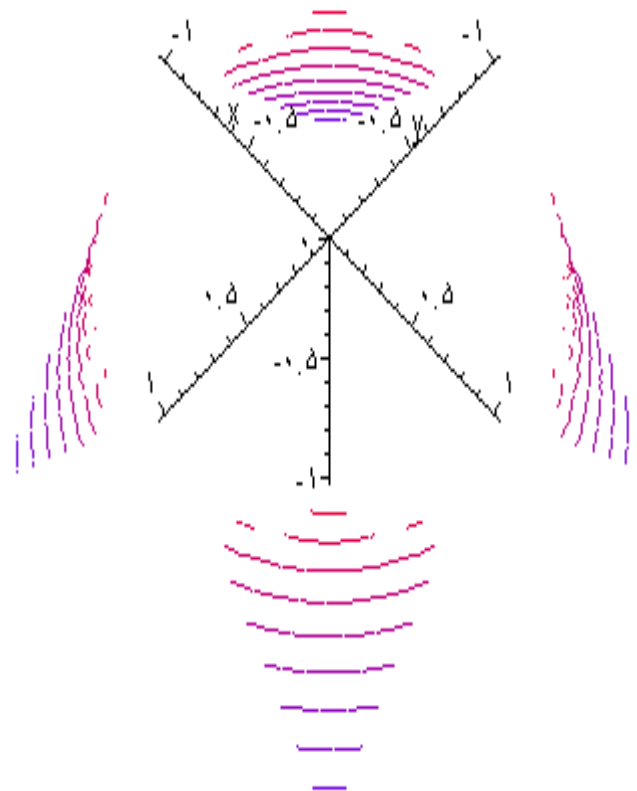
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$



$$z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

۱۴. ۲. ۴ مثال

رویه معرفی شده توسط معادله درجه دوم زیر را شناسایی کنید.

$$2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 3x + 6y + 12z = 24 + \frac{7}{8}$$

حل:

برای این منظور نخست قسمت درجه دوم طرف چپ معادله فوق یعنی

$$P(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$$

را درجه دوم نظر می گیریم. $P(x, y, z)$ یک صورت درجه دوم سه متغیره است.

صورت ماتریسی $P(x, y, z)$ عبارتست از

$$P(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ویژه مقدارهای ماتریس ضرایب صورت درجه دوم مذکور عبارت اند از

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$$

ویژه بردارهای یکه متناظر با این ویژه مقدارها عبارت اند از

$$v_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

اکنون تغییر مختصات

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$



$P(x,y,z)$ را به صورت زیر در می آورد

$$P(x, y, z) = x'^2 - 2y'^2 + 4z'^2$$

قسمت درجه اول معادله داده شده را نیز با استفاده * بر حسب x' , y' , z' می نویسیم و بدست می آوریم

$$3x + 6y + 12z = -4x' + 13y' - 2z'$$

در نتیجه معادله داده شده بر حسب y' , z' , به صورت زیر در می آید.

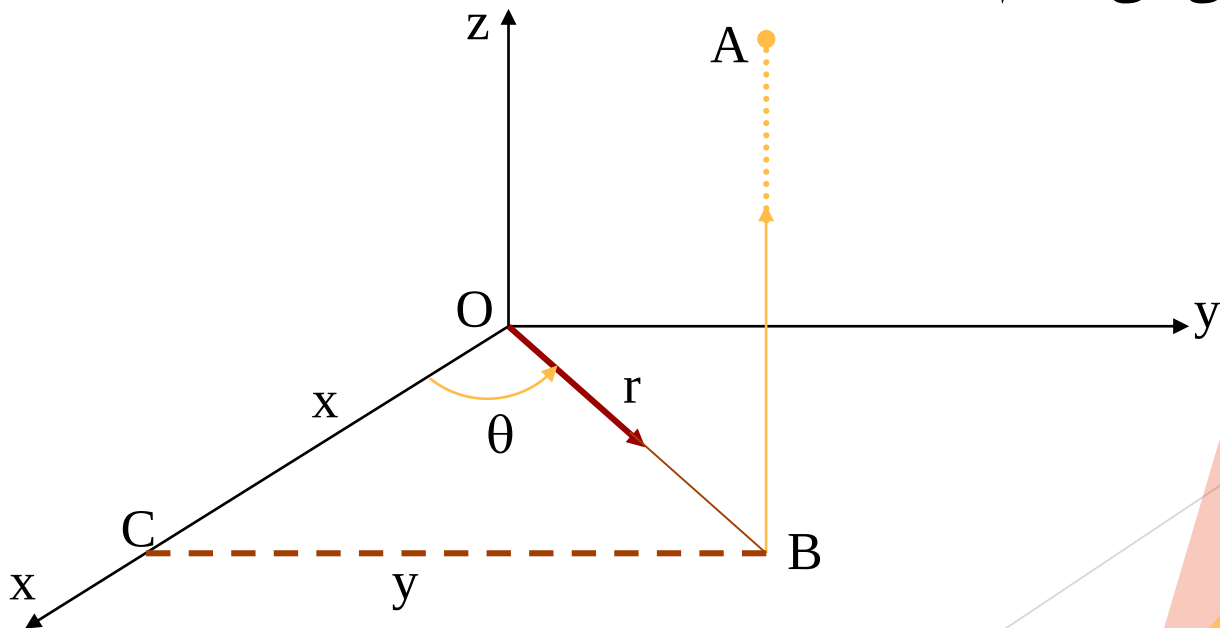
$$(x' - 2)^2 - 2(y' - \frac{13}{4})^2 - 4(z' - \frac{1}{4})^2 = 8$$

* مشاهده می کنیم که این معادله ، معرف یک هذلیوار یک پارچه است.

۳.۴ مختصات استوانه ای و کروی

هدف این قسمت تعمیم مختصات قطبی به فضای سه بعدی است. *

بنابراین دستگاههای مختصات استوانه ای و کروی را معرفی و برخی ویژگیهای آنها را بررسی می کنیم.



۴.۳.۱ تعریف

اگر $A(x,y,z)$ نقطه ای در دستگاه دکارتی xyz و B تصویر قائم آن بر صفحه xy باشد فرض کنید و اگر (r, θ) یک دسته مختصات قطبی B ، با محور قطبی Ox و قطب O باشد، آن گاه (r, θ, z) رایک دسته **مختصات استوانه ای** نقطه A می نامیم.

دامنه تغییرات r و θ به ترتیب به بازه های $[0, \infty)$ و $(-\pi, \pi]$ محدود می کنیم و $r=0$ را معرف محور z می گیریم.

✱ مشاهده می کنیم که با این محدودیت ها به هر نقطه در فضا فقط یک دسته مختصات استوانه ای نسبت داده می شود.

۲.۳.۴ رابطه مختصات دکارتی و استوانه ای

فرض می کنیم (x, y, z) و (r, θ, z) به ترتیب مختصات دکارتی و استوانه ای نقطه A باشند.

در مثلث قائم الزاویه OCB (قائمه در C) شکل ** داریم

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1)$$

به علاوه بنا به تعریف داریم

$$z = z \quad (2)$$

در نتیجه اگر مختصات استوانه ای (r, θ, z) نقطه A داده شده باشند

از روابط (۱) و (۲) مختصات دکارتی A به دست می آیند.

برعکس، باتوجه به شرایط $r \geq 0$ و $-\pi \leq \theta \leq \pi$ از روابط (۱) نتیجه می شود که

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad x \neq 0$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad x=0, \quad y \neq 0$$

بنا براین اگر مختصات دکارتی (x,y,z) نقطه A داده شده باشد آن گاه مختصات استوانه ای آن عبارت خواهد بود از

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y \neq 0 \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \end{cases} \quad z = z$$

۳.۳.۴ مثال

نقطه $A(1, -1, \sqrt{2})$ در دستگاه مختصات دکارتی داده شده است ، مختصات استوانه ای آن را تعیین می کنیم.

حل:

فرض می کنیم که (r, θ, z) مختصات استوانه ای A باشد ، داریم

$$z = \sqrt{2} \quad , \quad r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad ,$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

۶.۳.۴ استوانه

فرض کنید c عددی ثابت و نامنفی باشد. در دستگاه مختصات استوانه ای

$$A = \{(r, \theta, z) \mid r = c\}$$

مجموعه

استوانه ای است که خم هادی آن

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$$

و مولد آن موازی با محور z است. معادله این استوانه در دستگاه مختصات

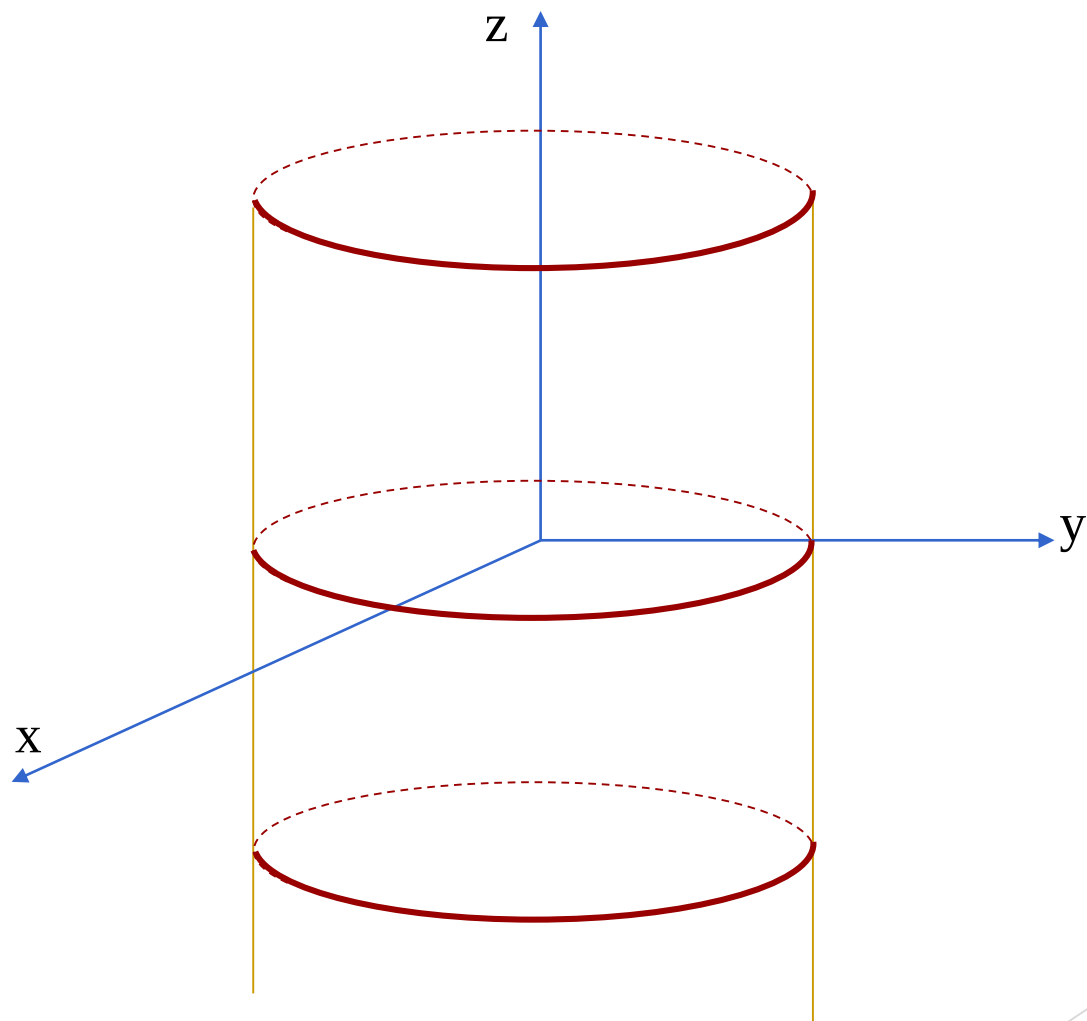
استوانه ای

$$r = c$$

و در دستگاه مختصات دکارتی

$$x^2 + y^2 = c^2$$

است.



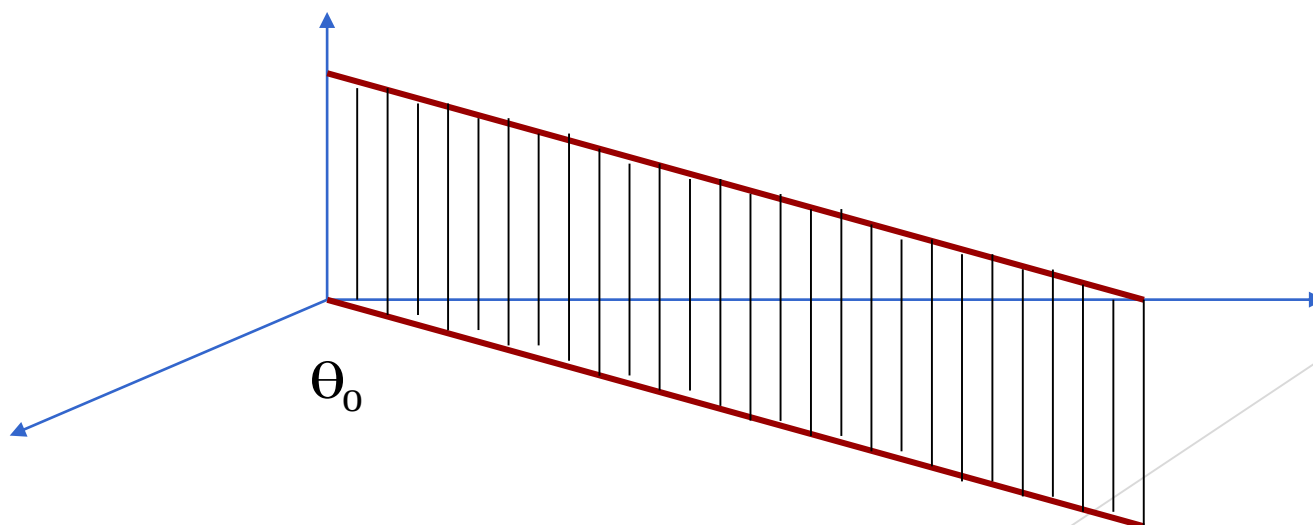
استوانه $r = c$

فرض می کنیم $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$ عددی ثابت باشد. در دستگاه مختصات استوانه ای

$$B = \{(r, \theta, z) \mid \theta = \theta_0\}$$

مجموعه

یک نیم صفحه است. بسته به ازای $\theta = 0$ این نیم صفحه عبارت است از تمام نقاط صفحه xOy که شامل نیمه نامنفی محور x است.



۸. ۳. ۴ مثال

نمودار معادله $r = 2(1 + \cos \theta)$ را در دستگاه مختصات استوانه ای رسم کنید.

حل:

این نمودار عبارت است از مجموعه نقاط

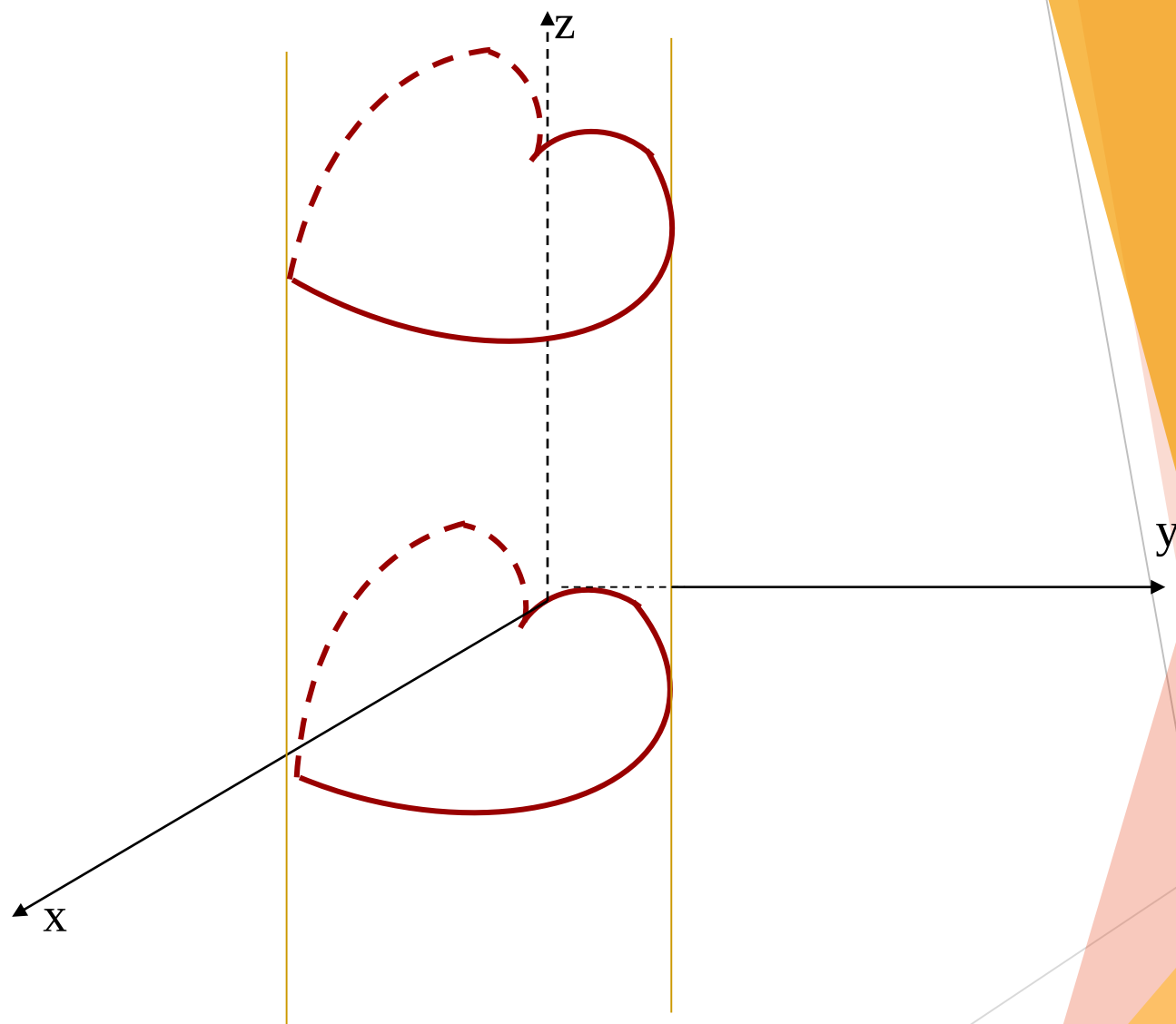
$$A = \{(r, \theta, z) \mid r = 2(1 + \cos \theta)\}$$

بنابراین مختص z عددی است اختیاری .

به ازای $z = 0$ ، $r = 2(1 + \cos \theta)$ یک دلنما در صفحه xOy است. بنابراین، مجموعه

A یا به بیان دیگر معادله $r = 2(1 + \cos \theta)$ یک استوانه است که هادی آن دلنمای

مذکور و مولد آن موازی با محور z است .



قسمتی از نمودار معادله $r = 2(1 + \cos \theta)$

۴.۳.۱۰ تعریف

سه تایی مرتب (ρ, φ, θ) را مختصات کروی نقطه A می نامیم.
توجه کنید که چون $\theta = \theta_0$ معرف یک نیم صفحه و محور OZ واقع در آن محور قطبی است، دامنه تغییرات φ ، عبارت است از $[0, \pi]$ یعنی $0 \leq \varphi \leq \pi$

۴.۳.۱۱ رابطه مختصات دکارتی و کروی

اگر (x, y, z) مختصات دکارتی نقطه A باشد. آن گاه مختصات کروی آن (ρ, φ, θ) از روابط زیر به دست می آیند.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

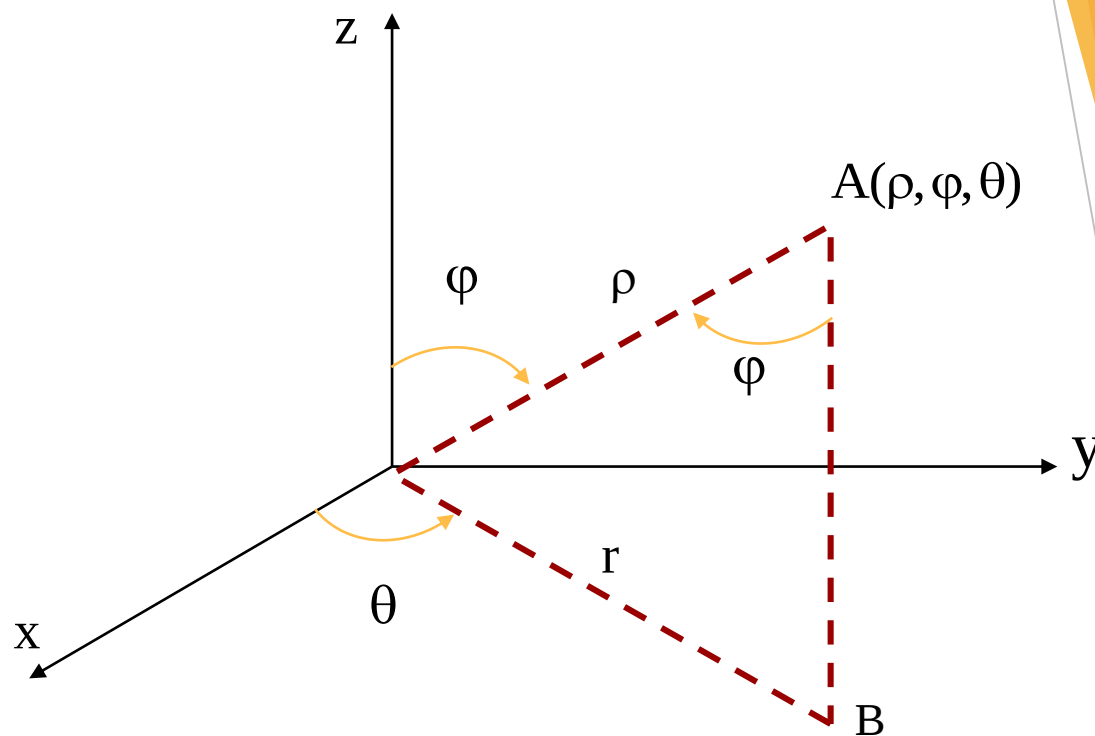
برعکس اگر (ρ, φ, θ) مختصات کروی نقطه A با مختصات دکارتی (x, y, z)

باشد آن گاه با توجه به شکل اسلاید بعدی و روابط فوق داریم

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$



مختصات کروی

۱۲.۳.۴ مثال

نقطه $A(-2, 1, -3)$ در دستگاه مختصات دکارتی داده شده است. مختصات
کروی این نقطه را پیدا می کنیم.

حل:
داریم

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{z}{\rho} = \cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{14}} \approx \cos^{-1}(0/80002) \approx 36^\circ 57'$$

در مورد θ داریم

$$\cos \theta = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + 1}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0/8944$$

ولذا داریم

$$\theta \approx 180^\circ - 26^\circ 36' = 153^\circ 24'$$

(الف) معادله کره : می دانیم که

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

معادله کره به مرکز O و شعاع r است این معادله در دستگاه مختصات کروی

$$\rho = r$$

به صورت

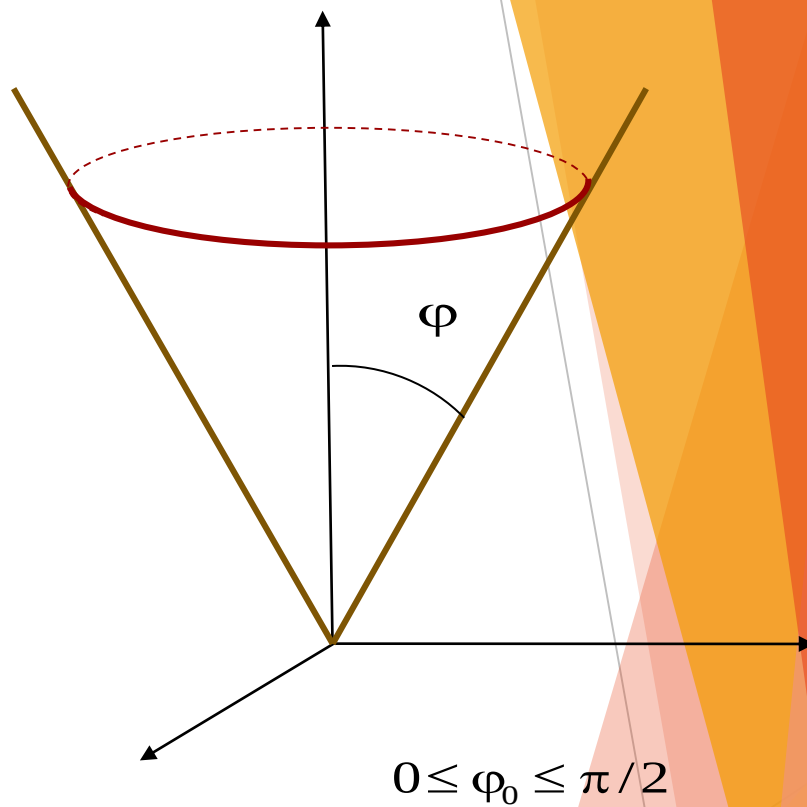
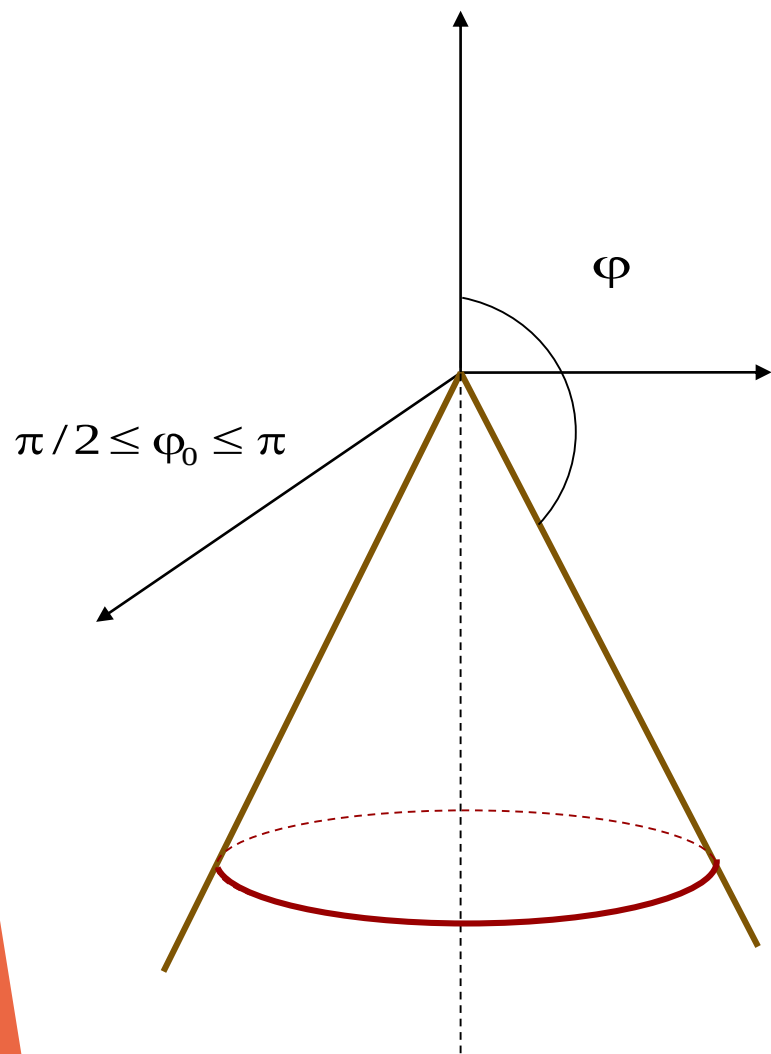
نوشته می شود.

(ب) معادله نیم صفحه : همانند دستگاه مختصات استوانه ای اگر θ_0

$\pi \leq \theta_0 \leq \pi$ - عددی ثابت باشد ، $\theta = \theta_0$ معرف یک نیم صفحه است.

(پ) معادله مخروط : اگر $\varphi_0 \in (0, \pi)$ عددی ثابت باشد، می خواهیم

نمودار معادله $\varphi = \varphi_0$ را پیدا کنیم.



۱۶. ۳. ۴ مثال

صورت دکارتی معادله کروی $\rho = 6\sin\varphi\sin\theta + 3\cos\theta$ را بنویسید.

حل:

برای این کار دو طرف معادله داده شده را در ρ ضرب می کنیم تا به دست

$$\rho^2 = 6\rho\sin\varphi\sin\theta + 3\rho\cos\theta \quad \text{آوریم.}$$

اکنون با توجه به روابط تعریف شده داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6y + 3z$$

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-\frac{3}{2})^2 = \frac{45}{4} \quad \text{و یا}$$

بنابراین معادله داده شده ، معادله کره به مرکز $(0, 1, \frac{3}{2})$ و شعاع $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ است.

فصل پنجم

توابع برداری یک متغیره

هدفهای کلی

هدفهای کلی این فصل را می توان به صورت زیر خلاصه کرد.

1. آشنا کردن دانشجو با توابع برداری یک متغیره ، حساب دیفرانسیل و انتگرال و کاربردهای این توابع
2. مطالعه حرکت در صفحه و فضا با استفاده از ویژگی های توابع برداری
3. به کار بستن مطالبی از فصل های گذشته در این فصل .

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند

ا- حد، مشتق و انتگرال توابع برداری یک متغیره را محاسبه کند.

ب- خم و مسیر را تعریف و معادله های پارامتری برخی از مسیر ها را پیدا کند

ج- خم هموار را بشناسد، طول خم داده شده را محاسبه و در صورت امکان خم را توسط طول خم پارامتری کند.

ت- برخی خم های معروف از جمله سیکلوئید (چرخزاد) و... را بشناسد و طول و انحنای آنها را محاسبه کند.

ث- مفاهیم مربوط به حرکت در یک صفحه، از جمله سرعت، شتاب، تندی، مولفه های قائم و مماسی شتاب را محاسبه کند.

ج- دستگاه مختصات متحرک TN را به ازای هر مسیر داده شده به دست آورد و از آن برای محاسبه انحنای مسیر، و معادله دایره انحنای استفاده کند.

ج- فرمول های مربوط به انحنای مسیر را بداند.

ج- دستگاه مختصات فضایی TNB را در هر نقطه از مسیر داده شده به دست آورد و با استفاده از آن انحنای و تاب مسیر های فضایی را پیدا کند.

ج) فرمول های مربوط به تاب را به دست آورد و مسطح یا نامسطح بودن خم را تشخیص دهد.

د) صفحه قائم و صفحه بوسان و صفحه رکتیفایر را در مورد هر خم داده شده به دست آورد.

۱. ۵ توابع برداری یک متغیره

۱. ۴. ۱ تعریف

تابع $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ که در آن $A \subseteq \mathbb{R}$ و $n = 2$ و $n = 3$ را یک **تابع برداری یک متغیره** مجموعه A را **دامنه** و مجموعه $\mathbb{R}^n$ را **برد** این تابع می نامیم.

به ازای $n = 2$ و $\mathbb{R}^n$ ، $f(t)$ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

که در آن $f_1: A \rightarrow \mathbb{R}$ و $f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی حقیقی روی A هستند. از طرف دیگر $f(t)$ معرف نقطه ای چون $X(x, y) \in \mathbb{R}^2$ است. بنابراین داریم:

$$y = f_2(t) \quad , \quad x = f_1(t) \quad (1)$$

معادله های (۱) را **معادله پارامتری** نگاره f یعنی مجموعه $f(A)$ ، و توابع و
را مولفه های f و متغیر t را یک پارامتر می نامیم.

به همین ترتیب به ازای $n=3$ ، اگر توابع حقیقی $f_1: A \rightarrow \mathbb{R}$ و $i=1, 2$ چنان
باشند که

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \quad t \in A$$

آنگاه این توابع را **مولفه های f** و معادله های

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

را **معادله های پارامتری** $f(A)$ و متغیر t را یک پارامتر می نامیم

۲. ۱. ۵ مثال

به ازای $A = [0,1)$ تابع $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ با تعریف

$$f(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$$

دارای مولفه های

$$f_1(t) = \sin 2\pi t, \quad f_2(t) = \cos 2\pi t \quad t \in A$$

و مجموعه $f(A)$ دارای معادله های پارامتری

$$x = \sin 2\pi t, \quad y = \cos 2\pi t \quad *$$

است.

توجه کنید که $f(A)$ دایره به مرکز $O(0,0)$ و شعاع $r=1$ ، یعنی دایره واحد

است. در واقع اگر $(x,y) \in f(A)$ نقطه دلخواهی متعلق به $f(A)$ باشد، آنگاه

$$x^2 + y^2 = (\sin^2 2\pi t + \cos^2 2\pi t) = 1$$

یعنی (x,y) متعلق به دایره واحد است، برعکس هر نقطه دلخواه روی دایره واحد را فقط به یک صورت می توان توسط معادله های $*$ با $t \in A$ نشان داد.

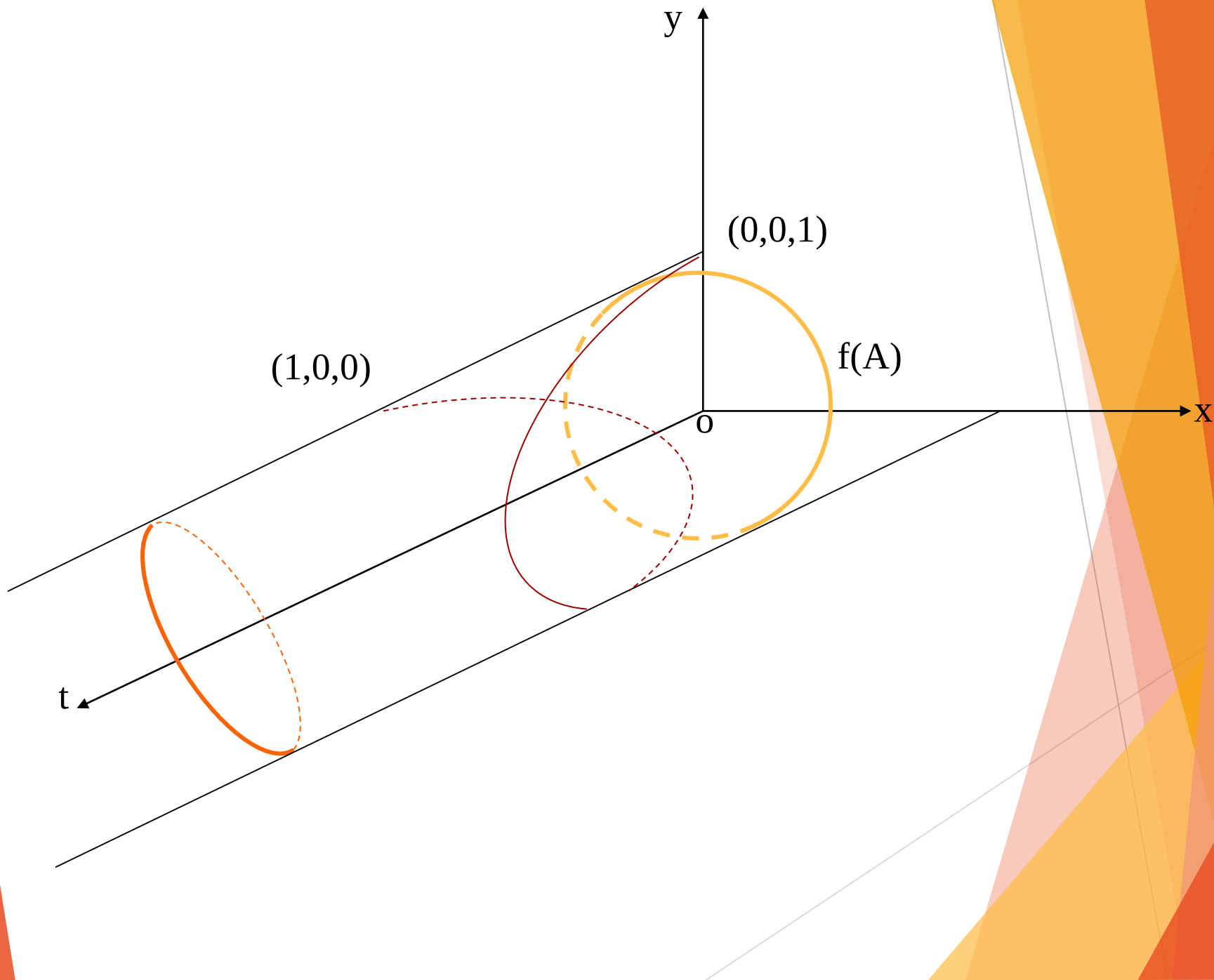
توجه کنید که نمودار f ، یعنی مجموعه

$$G = \{(t, f(t)) \mid t \in A\} = \{(t, \sin 2\pi t, \cos 2\pi t) \mid t \in A\}$$

با نگاره f متفاوت است. در شکل اسلاید بعدی مجموعه های $f(A)$ و G را در دستگاه مختصات txy نشان داده ایم. توجه کنید که G روی استوانه

$$x^2 + y^2 = 1$$

قرار دارد.



۳. ۱. ۵ مثال

تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ با تعریف

$$f(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t)$$

دارای مولفه های

$$f_1(t) = 2\cos t, \quad f_2(t) = 2\sin t, \quad f_3(t) = 3t$$

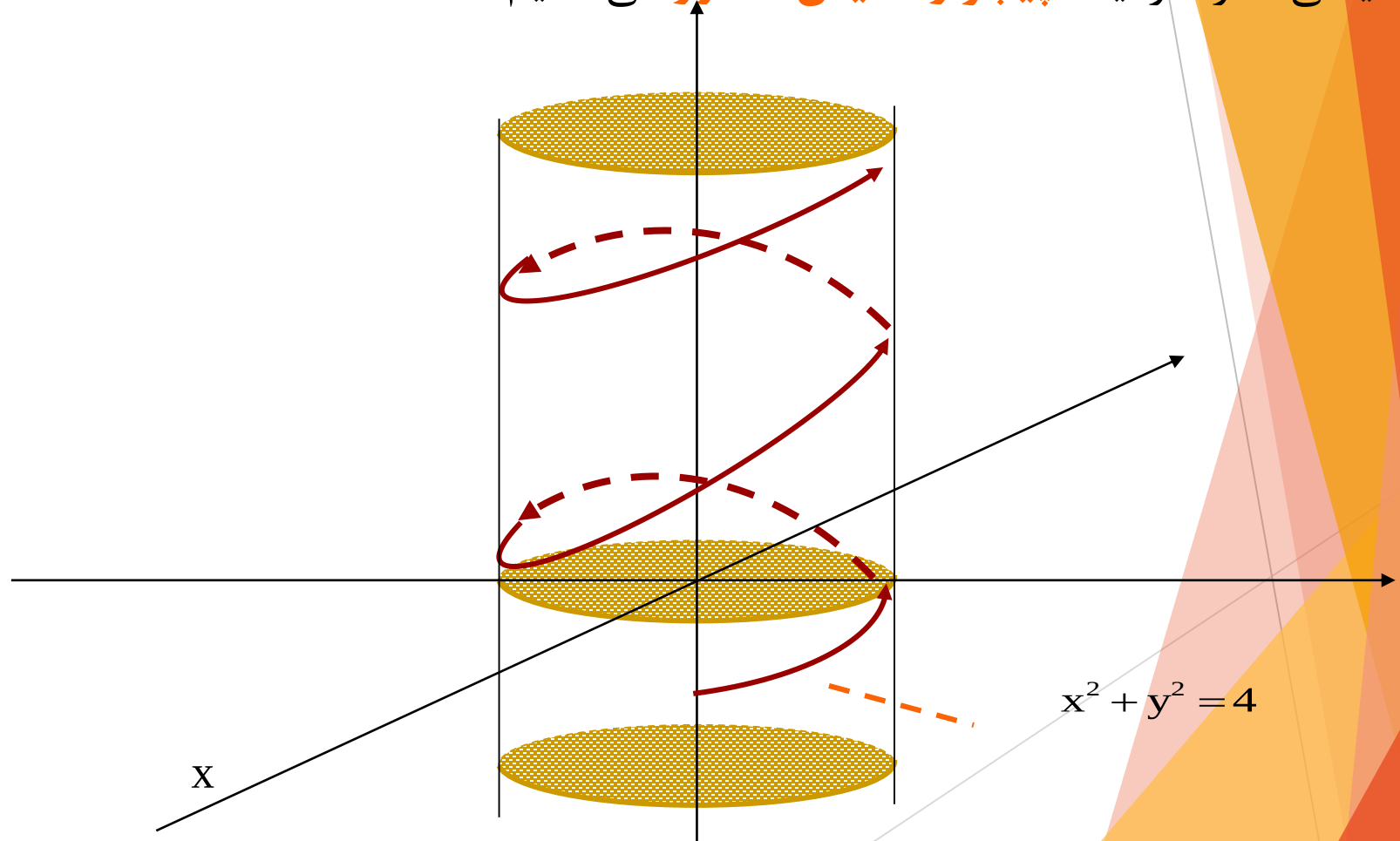
است. معادله های پارامتری $f(\mathbb{R})$ عبارت اند از:

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = 3t$$

توجه کنید که در این حالت نمودار f یک زیر مجموعه از $\mathbb{R}^4$ است و لذا قابل ترسیم نیست. ولی $f(\mathbb{R})$ زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}^3$ است. داریم

$$f(\mathbb{R}) = \{(x, y, z) \mid x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3t\}$$

مشاهده می کنیم که به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ، $x^2 + y^2 = 4$ بنابراین هر نقطه $(x, y, z) \in f(\mathbb{R})$ روی استوانه قائم $x^2 + y^2 = 4$ واقع است. مجموعه $f(\mathbb{R})$ ، یعنی نگاره f را یک پیچوار (هلیس) مدور می نامیم.



۶. ۱. ۵ تعریف

می گوئیم تابع برداری $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ با $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ و

$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ با $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ در نقطه $t = t_0$

دارای حد $L = (l_1, l_2)$ ، $L = (l_1, l_2, l_3)$ است اگر

$$\left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = l_1, \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = l_2, \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) = l_3 \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = l_1, \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = l_2$$

✳ به عبارت دیگر تابع f در نقطه t_0 حد دارد اگر و تنها اگر هر یک از

مولفه های آن در این نقطه حد داشته باشد.

۹. ۱. ۵ تعریف

می گوئیم تابع $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ که در آن $n = 2$ یا $n = 3$ در نقطه $t = a \in A$ پیوسته است اگر داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

f را روی A **پیوسته** می نامیم اگر در هر یک از نقاط A پیوسته باشد.

با توجه به تعریف مشاهده می کنیم که تابع f در نقطه $t = a$ پیوسته است اگر و تنها اگر هر یک از مولفه های f در a پیوسته باشد. به عبارت دیگر اگر

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \quad \text{یا} \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

آنگاه f در a پیوسته است اگر و تنها اگر توابع f_1, f_2, f_3 در a پیوسته باشند.

۱۰. ۱. ۵ مثال

الف) تابع $f(t) = (\sqrt{t^2 + 1}, \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$ در نقطه $t = 0$ پیوسته است .

حل:

زیرا همه مولفه های f در این نقطه پیوسته هستند. در واقع داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{1} = 1 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0 = \sin 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1$$

ب) تابع $f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \ln(2+t) \right)$, $t > -2$, $t \neq 0$ در نقطه $t = 0$ پیوسته نیست.

حل:

زیرا تابع $f_1(t) = \left(\frac{\sin t}{t} \right)$ در نقطه $t = 0$ تعریف نشده است. با وجود این داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = (1, \ln 2)$$

۱۲. ۱. ۵ تعریف

اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با $a < b$ و $n = 2$ یا $n = 3$ تابعی پیوسته روی $[a, b]$ باشد، آنگاه f را یک **خم** در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ می نامیم. نگاره f یعنی مجموعه را **اثر** یا **مسیر** خم (و گاه خود خم) و معادلات پارامتری $f[a, b]$ را **معادلات پارامتری** خم می نامیم.

۱۳. ۱. ۵ مثال

تابع $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ با تعریف :

$$f(t) = (|t|, t^2)$$

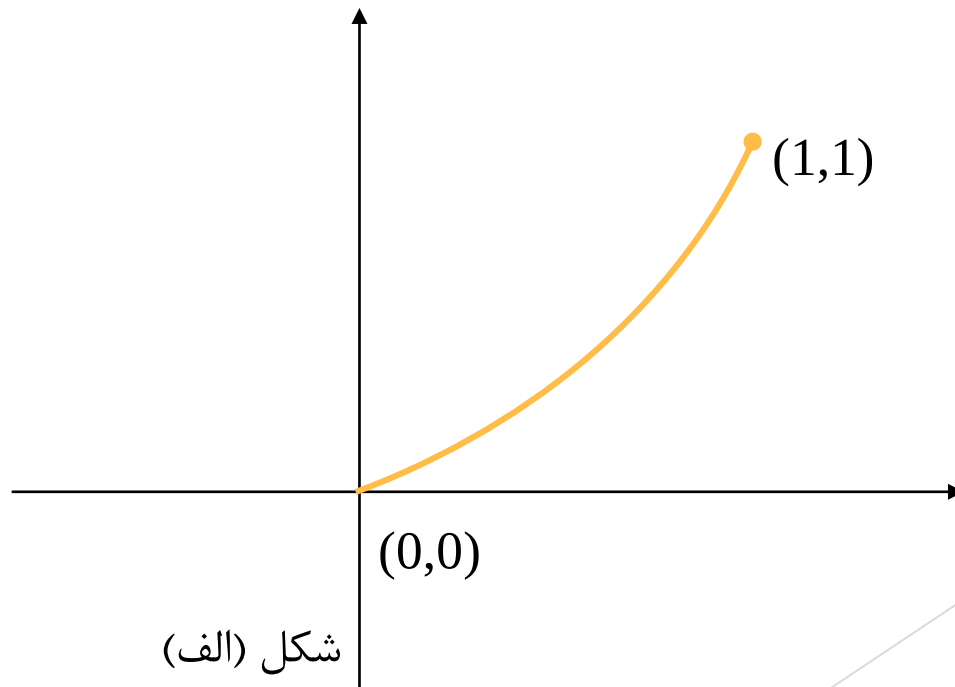
روی $[-1, 1]$ پیوسته و لذا یک خم در $\mathbb{R}^2$ است. معادلات پارامتری این خم عبارت اند از :

$$x = |t|, \quad y = t^2, \quad t \in [-1, 1]$$

اثر این خم یا نگاره f عبارت است از:

$$\begin{aligned} f[-1,1] &= \{f(t) | t \in [-1,1]\} = \{(|t|, t^2) | t \in [-1,1]\} \\ &= \{(x, y) | x = |t|, y = t^2, t \in [-1,1]\} \\ &= \{(x, x) | 0 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

در شکل زیر $f[-1,1]$ را رسم کرده ایم.



توجه کنید که وقتی t از -1 تا 0 افزایش می یابد ، نقطه (x,y) اثر خم f را از $(1,1)$ تا $(0,0)$ یک بار می پیماید. همچنین وقتی t از 0 تا 1 افزایش یابد نقطه (x,y) اثر خم f را از $(0,0)$ تا $(1,1)$ مجدداً طی می کنند. بنابراین هریک از دسته معادله های

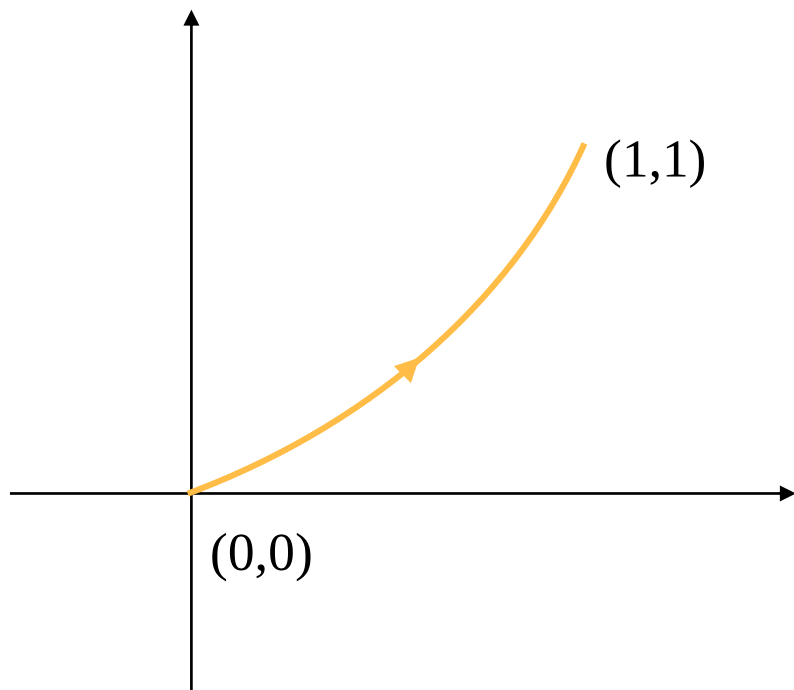
$$x = -t , \quad y = t^2 \quad t \in [-1,0]$$



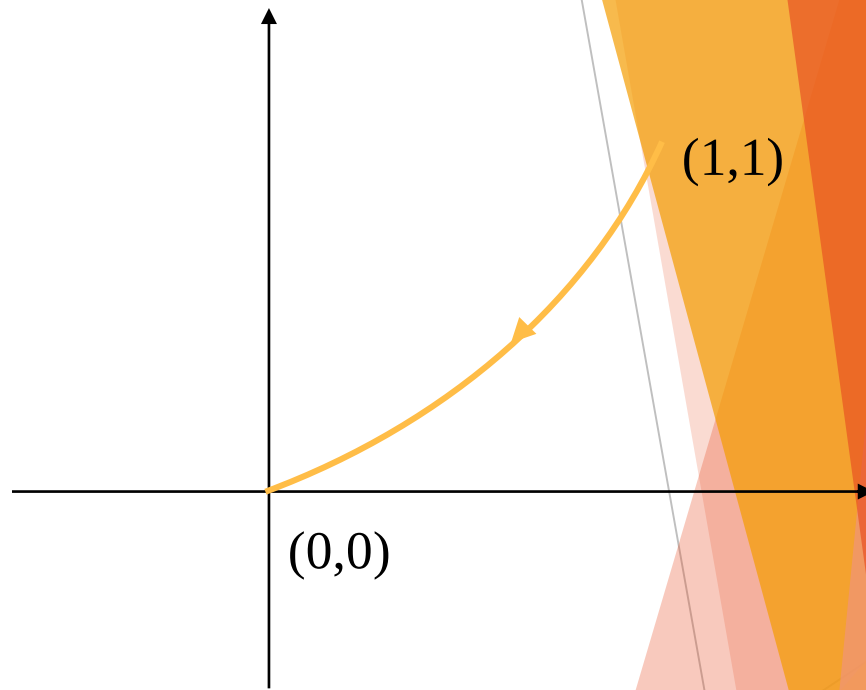
$$x = t , \quad y = t^2 \quad t \in [0,1]$$



معادلات پارامتری خم واحدی هستند. در شکل (ب) خم مذکور با معادلات پارامتری * و در شکل (پ) خم مذکور با معادلات پارامتری ** نشان داده شده اند. در این شکل ها پیکانها جهت حرکت نقطه (x,y) روی خم را نشان می دهند.



شکل (ب)



شکل (پ)

۱۴. ۱. ۵ مثال

$$f(t) = (\cosh 2t, \sinh 2t, t) \quad t \in \mathbb{R}$$

اثر خم

را مشخص می کنیم.

حل:

بنا بر تعریف ، اثر f عبارتست از:

$$f(\mathbb{R}) = \{ (\cosh 2t, \sinh 2t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

چون

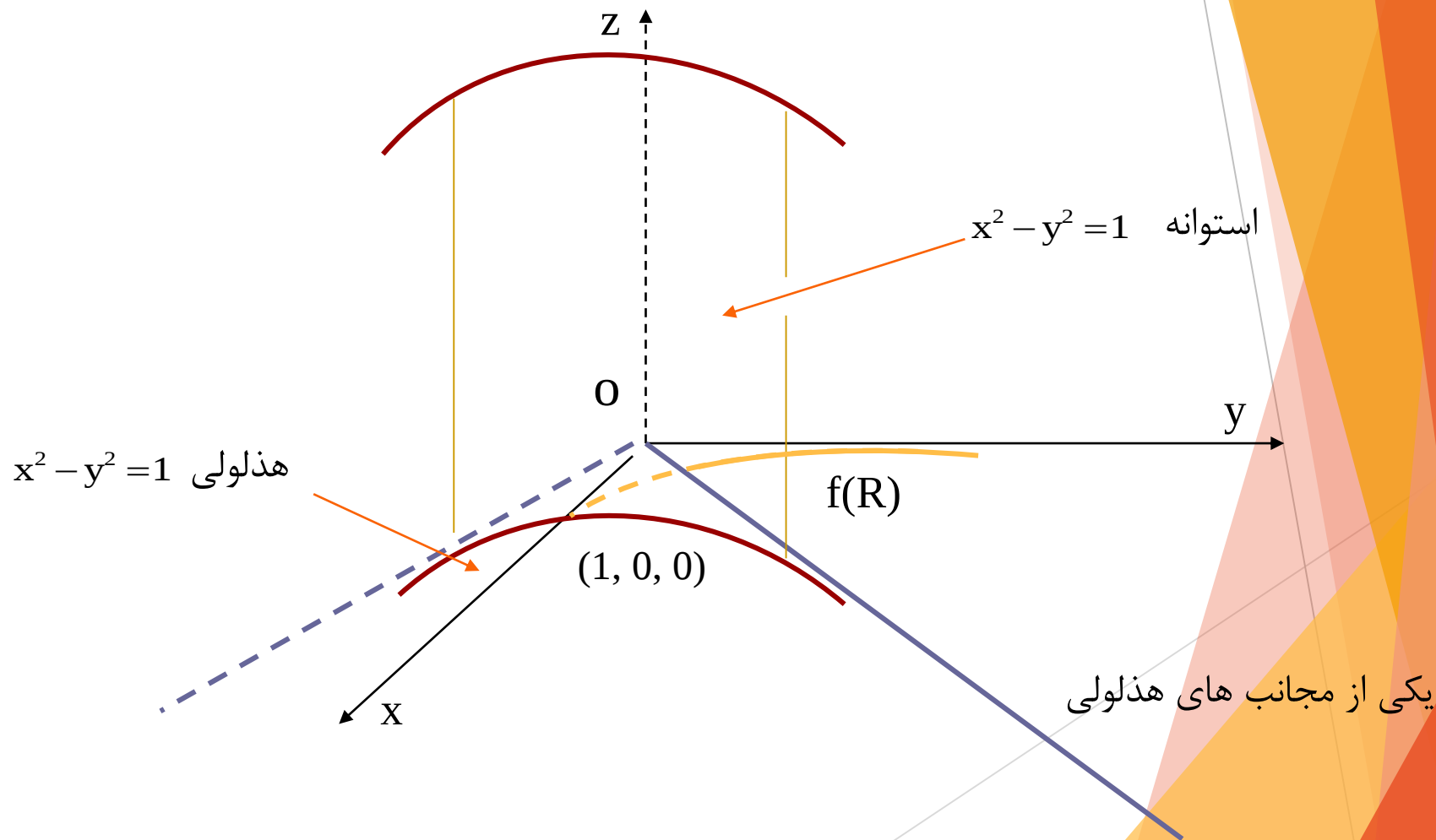
$$x^2 - y^2 = \cosh^2 2t - \sinh^2 2t = 1$$

پس $f(A)$ روی استوانه $x^2 - y^2 = 1$ قرار دارد. چون به ازای هر t ، $x = \cosh 2t > 0$ پس برای ترسیم استوانه مذکور تنها شاخه ای از هذلولی

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

را در نظر می گیریم که مختص اول هر نقطه آن مثبت است.

در شکل زیر قسمتی از $f(R)$ ، اثر f را روی قسمتی استوانه $x^2 - y^2 = 1$ رارسم کرده ایم.



۱۵. ۱. ۵ مثال

قسمتی از خم فصل مشترک رویه های

$$x^2 + y^2 = 2x$$

(الف)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

(ب)

را که در یک هشتم اول دستگاه مختصات xyz است رسم می کنیم.

حل:

بنابر تعریف یک هشتم اول دستگاه مختصات xyz مجموعه نقاط (x,y,z) است

که $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. خم مورد نظر از تلاقی استوانه

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

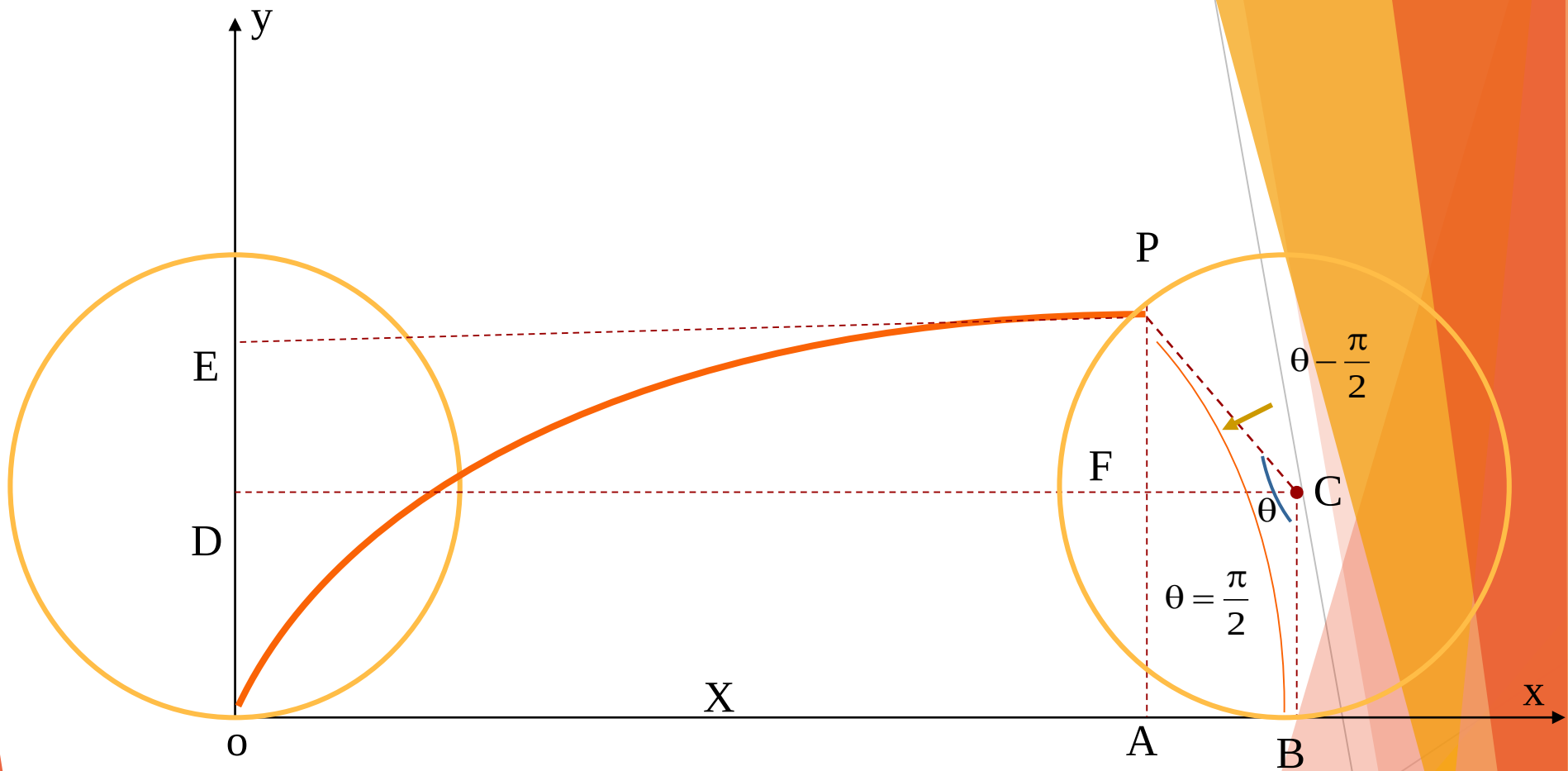
با کره زیر به دست می آید.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

۱۷. ۱. ۵ مثال

دایره ای به شعاع a در صفحه xOy روی محور X بدون اینکه بلغزد می غلتد. نقطه ای از این دایره را P می نامیم. این نقطه یک خم روی صفحه xOy پدید می آورد. این خم را **چرخزاد** یا **سیکلوئید** می نامیم. می خواهیم معادله های پارامتری چرخزاد را به دست آوریم.

برای این منظور فرض می کنیم مکان اولیه P ، نقطه O مبدا مختصات باشد. حال دایره را در جهت مثبت محور X می غلتانیم که P در وضعیت شکل زیر قرار گیرد.



توجه کنید که طول های کمانهای OP و PB و پاره خط OB مساوی اند. بنا براین
 شکل ، مختصات نقطه P به زاویه θ بستگی دارد. اگر (x,y) مختصات نقطه P باشد
 آنگاه

$$x=OB-AB \quad , \quad y=OD-DE=a+DE$$

از مثلث PFC داریم

$$AB = FC = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = a \sin \theta$$

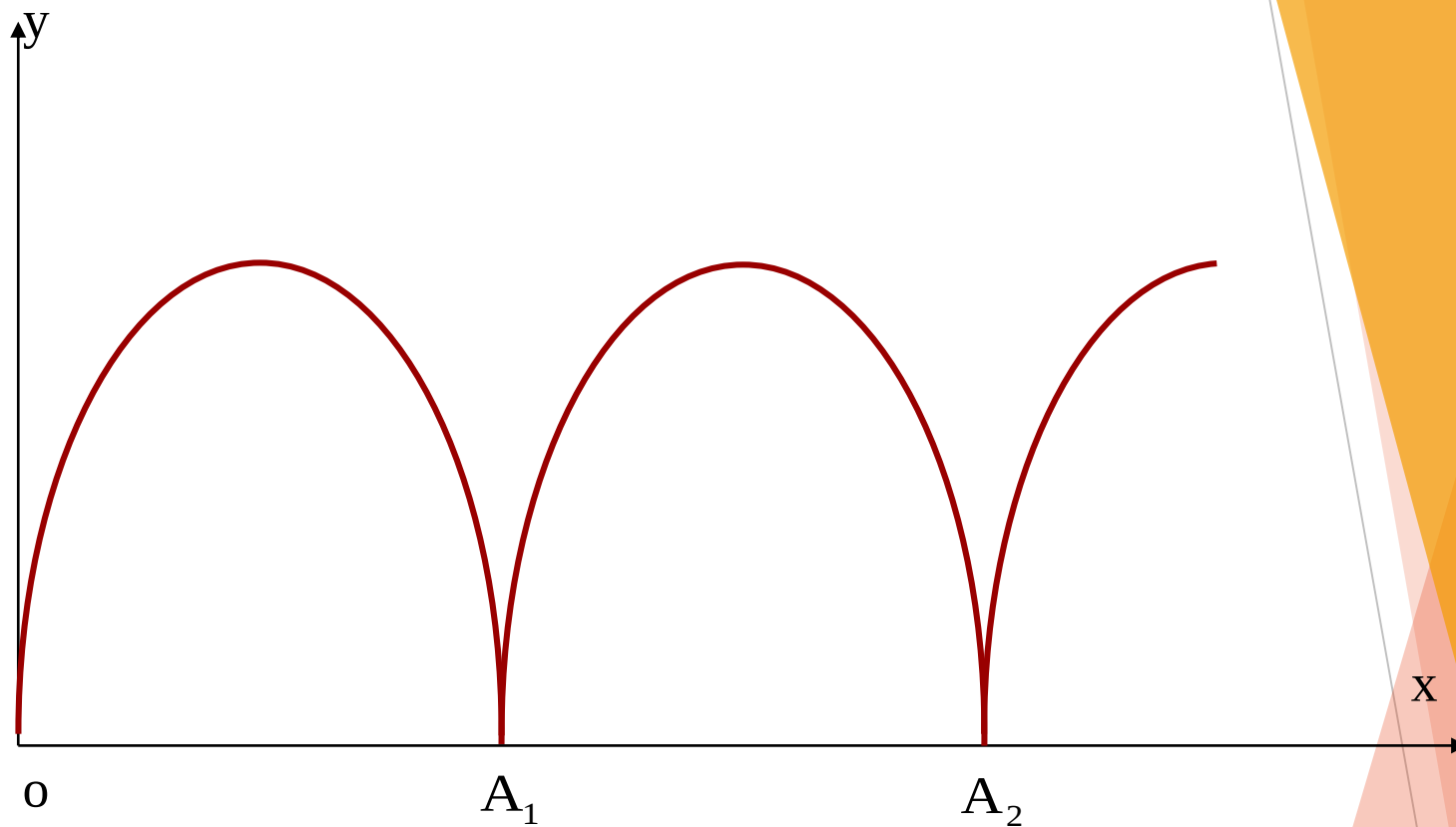
$$ED = PF = a \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -a \cos \theta$$

در دایره به مرکز C و شعاع a داریم

$$\widehat{OB} = \widehat{PB} = a\theta$$

در نتیجه

$$x = a\theta - a \sin \theta \quad , \quad y = a - a \cos \theta$$



چرخزاد، طول خم OA_1 برابر است با $2\pi a$

۱۹. ۱. ۵ تعریف

می گوئیم تابع برداری

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad (n = 2 \text{ یا } n = 3)$$

در نقطه $x = t \in [a, b]$ **مشتق‌پذیر** است اگر

$$\lim_{x \rightarrow t} \frac{1}{x - t} (f(x) - f(t))$$

وجود داشته باشد. بدیهی است در نقاط $t = a$ و $t = b$ منظور از وجود حد فوق، وجود حد های یکطرفه به ترتیب راست و چپ است.

در صورتی که f در نقطه t مشتق پذیر باشد، حد فوق را **مشتق f** در نقطه t می نامیم

و آن را با $f'(t)$ یا $\frac{df}{dt}(t)$ نشان می دهیم. بنابراین

$$f'(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$$

مشتق f در نقطه $t=a$ و $t=b$ را به ترتیب با $f'(a^+)$ یا $f'(b^-)$ نشان می دهیم.

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

بنابراین

$$f'(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

* به ازای $n = 2$ ، $f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t))$

** به ازای $n = 3$ ، $f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t))$

* بنابراین f در نقطه t **مشتقپذیر** است اگر و تنها اگر مولفه های آن در این نقطه مشتقپذیر باشند.

۲۰. ۱. ۵ مثال

مشتق تابع

$$f(x) = (e^{1-x^2}, \ln x, 1-x^2)$$

را در نقطه $x = \frac{1}{2}$ پیدا می کنیم.

حل:

بنابر رابطه *** به ازای هر $x > 0$ داریم:

$$f'(x) = \left(-2xe^{1-x^2}, \frac{1}{x}, -2x \right)$$

در نتیجه

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = (-e^{3/4}, 2, -1)$$

۲۳. ۱. ۵ مثال

می خواهیم $(f.g)'(0)$ ، $(f \times g)'(0)$ ، $(\phi f)'(0)$ را به ازای

$$f(t) = (\sqrt{t+1}, t^2 - 1, 2t)$$

$$g(t) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, 2t \right)$$

$$\phi(t) = \ln(2t + 1)$$

محاسبه کنیم.

$$f(0) = (1, -1, 0) \quad , \quad f'(0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$$

$$g(0) = (0, -1, 0) \quad , \quad g'(0) = (2, 0, 2)$$

$$\phi(0) = 0 \quad , \quad \phi'(0) = \ln 2$$

$$(f \cdot g)'(0) = f'(0) \cdot g(0) + f(0) \cdot g'(0) = 0 + 2 = 2$$

$$\begin{aligned} (f \times g)'(0) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (2, 0, -\frac{1}{2}) + (-2, -2, 2) = (0, -2, \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

$$(\phi f)'(0) = \phi'(0)f(0) + \phi(0)f'(0) = \ln 2 \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right) = \left(\frac{1}{2} \ln 2, 0, 2 \ln 2\right)$$

۲۶. ۱. ۵ قضیه:

زنجیر توابع

$$[a, b] \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \quad n=2 \text{ یا } 3$$

gof

را که در آن $f[a, b] \subset I$ و I یک بازه در $\mathbb{R}$ است در نظر بگیرید. فرض کنید f در نقطه $t \in [a, b]$ و g در نقطه $s = f(t)$ مشتقپذیر باشند. در این صورت تابع برداری $\text{gof} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ در نقطه t مشتقپذیر است و داریم

$$(\text{gof})'(t) = g'(f(t))f'(t)$$

یا به عبارت دیگر

$$\frac{d(\text{gof})}{dt} = \frac{dg}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dg}{ds} \frac{df}{dt}$$

توجه کنید که در این قضیه تابع f یک تابع اسکالر است.

۲۷. ۱. ۵ مثال

(ب) اگر

$$h(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}, \sin \sqrt{t-1}, \ln t \right)$$

$h(t)$ و به ویژه $h'(1)$ را محاسبه می کنیم.

حل:

قرار می دهیم $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ ، $g(t) = \left(\frac{1}{t}, \sin t, \ln(1+t) \right)$

$$h(t) = (g \circ f)(t)$$

و به دست می آوریم

چون $f(2) = 1$ و $f'(2) = -\frac{1}{2}$ و $f'(t) = -\frac{1}{2}(t-1)^{-3/2}$

$$g'(t) = \left(-\frac{1}{t^2}, \cos t, \frac{1}{1+t} \right) \quad g'(1) = \left(-1, \cos 1, \frac{1}{2} \right)$$

$$h'(t) = -\frac{1}{2}(t-1)^{-3/2} \left(-\frac{1}{t^2}, \cos t, \frac{1}{1+t} \right)$$

$$h'(2) = g'(1)f'(2) = -\frac{1}{2} \left(-1, \cos 1, \frac{1}{2} \right)$$

۲۹. ۱. ۵ تعریف

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

۳ یا ۲ = n

را روی $[a, b]$ هموار می نامیم اگر به ازای هر $t \in [a, b]$ $f'(t)$ وجود داشته،
روی $[a, b]$ پیوسته باشد.

$$|f'(t)| \neq 0$$

و به ازای هر t

توجه کنید که اگر به ازای $n = 2$ قرار دهیم

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

آنگاه نابرابری * به صورت زیر در می آید.

$$(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 \neq 0$$

❁ و بنا براین خم f همواره روی (a,b) هموار است اگر و تنها اگر در هر نقطه مشتق یکی از مولفه های f غیر صفر باشد. توجه کنید که این مطلب در حالت $n = 3$ نیز برقرار است.

۳۰. ۱. ۵ مثال

$$f(t) = (|t|, \ln(1+t), (1+t^2))$$

(الف) خم

روی $[-1, 1]$ هموار نیست، زیرا در نقطه $t = 0$ مولفه اول آن $f_1(t) = |t|$ مشتقپذیر نیست.

(ب) خم زیر روی $[0, 1]$ هموار است.

$$f(t) = (\sin t, \sin t, t^2 + 1)$$

۳۳. ۱. ۵ مثال

(الف) خم

$$f(t) = (|t|, \ln(1+t), (1+t^2)) \quad t \in [-1, 1]$$

روی $[-1, 1]$ پاره هموار است، زیرا این خم در نقطه $t = 0$ مشتق ندارد.

(ب) چرخزاد به عنوان یک خم در نقطه های $2a\pi, 4a\pi, \dots$ هموار نیست و در بقیه نقاط هر بازه متناهی هموار است.

(پ) خم

$$f(t) = (t^2, t^2, t^4)$$

در نقطه $t = 0$ هموار نیست، زیرا

$$|f'(0)| = 0$$

۳۴. ۱. ۵ تعریف

(الف) فرض می کنیم

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad n = 2 \text{ یا } 3$$

خمی هموار باشد. **طول** این خم را با s نشان می دهیم و با رابطه زیر تعریف می کنیم:

$$s = \int_a^b |f'(t)| dt$$

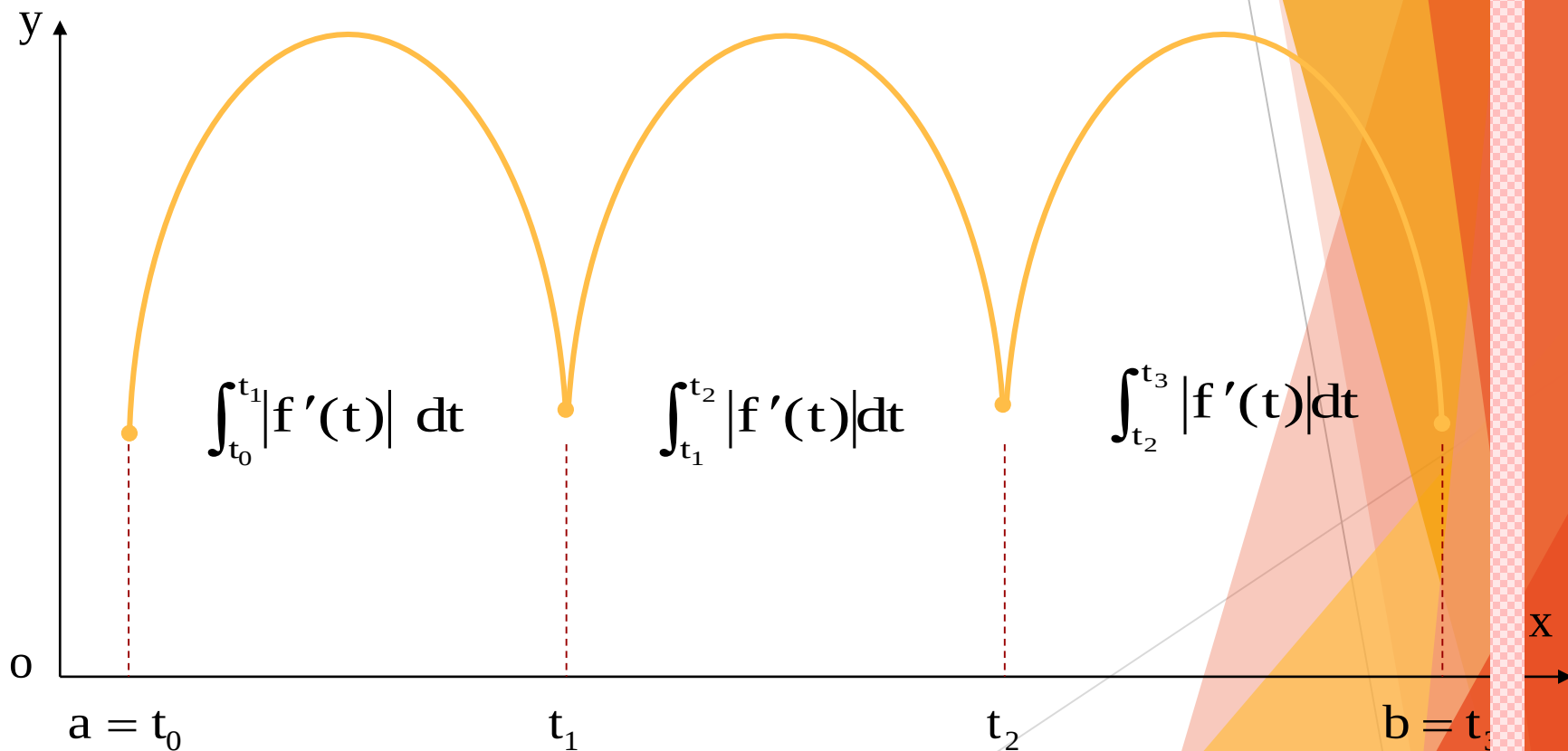
(ب) اگر f در نقاط $t_1, \dots, t_n$ متعلق به $[a, b]$ پاره — هموار باشد و

$a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$ **طول** f را با رابطه زیر تعریف می کنیم

$$s = \int_a^{t_1} |f'(t)| dt + \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)| dt + \dots + \int_{t_n}^b |f'(t)| dt$$

با قرار دادن $a = t_0$ و $b = t_{n+1}$ این فرمول به صورت زیر در می آید.

$$s = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f'(t)| dt$$



طول خم پاره هموار

توجه کنید که اگر به ازای $n = 2$ 

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

آنگاه

$$s = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t)} dt$$

همچنین به ازای $n = 3$ و بنابراین داریم $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$

$$s = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)} dt$$

۳۵. ۱. ۵ مثال

(الف) طول خم

$$f(t) = (t, t^2) \quad t \in [0, 1]$$

مساوی است با

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5})$$

(ب) خم

$$f(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

هموار است و طول آن مساوی است با

$$\int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

✱ مشاهده می کنیم که طول خم تابعی از پارامتر تعریف کننده خم نیز هست،

یعنی اگر $a \leq t \leq b$ آنگاه

$$s(t) = \int_a^t |f'(\eta)| d\eta$$

چون $|f'(\eta)|$ تابعی پیوسته روی $[a, b]$ است، پس s تابعی مشتقپذیر از t است

و داریم

$$\frac{ds(t)}{dt} = |f'(t)| = \left| \frac{df}{dt} \right|$$

در نتیجه

$$\left| \frac{dt}{ds} \right| = 1$$

✱ با توجه به این پدیده تعریف زیر را داریم.

۳۷. ۱. ۵ تعریف

می گوئیم خم

یا

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad n = 2 \text{ یا } 3$$

$$f(s) = (f_1(s), f_2(s)) \quad \text{یا} \quad f(s) = (f_1(s), f_2(s), f_3(s))$$

توسط طول خم پارامتری شده است اگر

$$\left| \frac{df}{ds} \right| = 1$$

البته با توجه به قاعده زنجیری، اگر t پارامتر دی گری برای خم باشد، داریم

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = f'(t) \frac{dt}{ds} = \frac{f'(t)}{\frac{ds}{dt}}$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

(ب) پیچوار

$$f(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad t \in \mathbb{R}$$

رانسبت به طول خم پارامتری می کنیم.

حل:

طول خم در بازه $[0, t]$ عبارت است از

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\eta = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

$$s(t) = \int_{-t}^0 \sqrt{a^2 + b^2} d\eta = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

واز این رو ، در هر دو مورد داریم

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

حال این مقدار t را در تعریف f قرار می دهیم و به دست می آوریم.

$$f(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad s \geq 0$$

اکنون توجه کنید که با این نمایش طول خم f در بازه $[0, s]$ مساوی است با s و به علاوه داریم

$$\left| \frac{df}{ds} \right| = 1$$

پ) آیا خم

$$f(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t) \quad t \in \mathbb{R}$$

را می توان با طول خم پارامتری کرد؟

حل:

نقطه $t_0 \in \mathbb{R}$ را در نظر می گیریم. طول خم از نقطه $f(t_0)$ تا $f(t)$ عبارتست از

$$s(t) = \int_{t_0}^t |f'(\eta)| \, d\eta = \int_{t_0}^t e^\eta \sqrt{3} \, d\eta = \sqrt{3}(e^t - e^{t_0})$$

بنابراین t تابعی از s است و داریم

$$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right) \quad \text{یا} \quad e^t = \frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}$$

در نتیجه خم را می توان توسط s پارامتری کرد و مولفه های آن را به صورت زیر به دست آورد.

$$f_1(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right) \sin \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right), \quad s \geq 0$$

$$f_2(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right) \cos \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right), \quad s \geq 0$$

$$f_3(s) = \frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}, \quad s \geq 0$$

توجه کنید که با انتخاب $t_0 = 0$ این مولفه ها صورت ساده تری به خود می گیرند.

۴۰. ۱. ۵ تعریف انتگرال تابع پیوسته

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

را به صورت $\int_a^b f(t) dt$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \int_a^b f_3(t) dt \right)$$

به همین ترتیب انتگرال تابع پیوسته زیر تعریف می شود.

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \quad t \in [a, b]$$

توجه کنید که انتگرال هر تابع برداری، برداری از جنس مقادیر همان تابع 

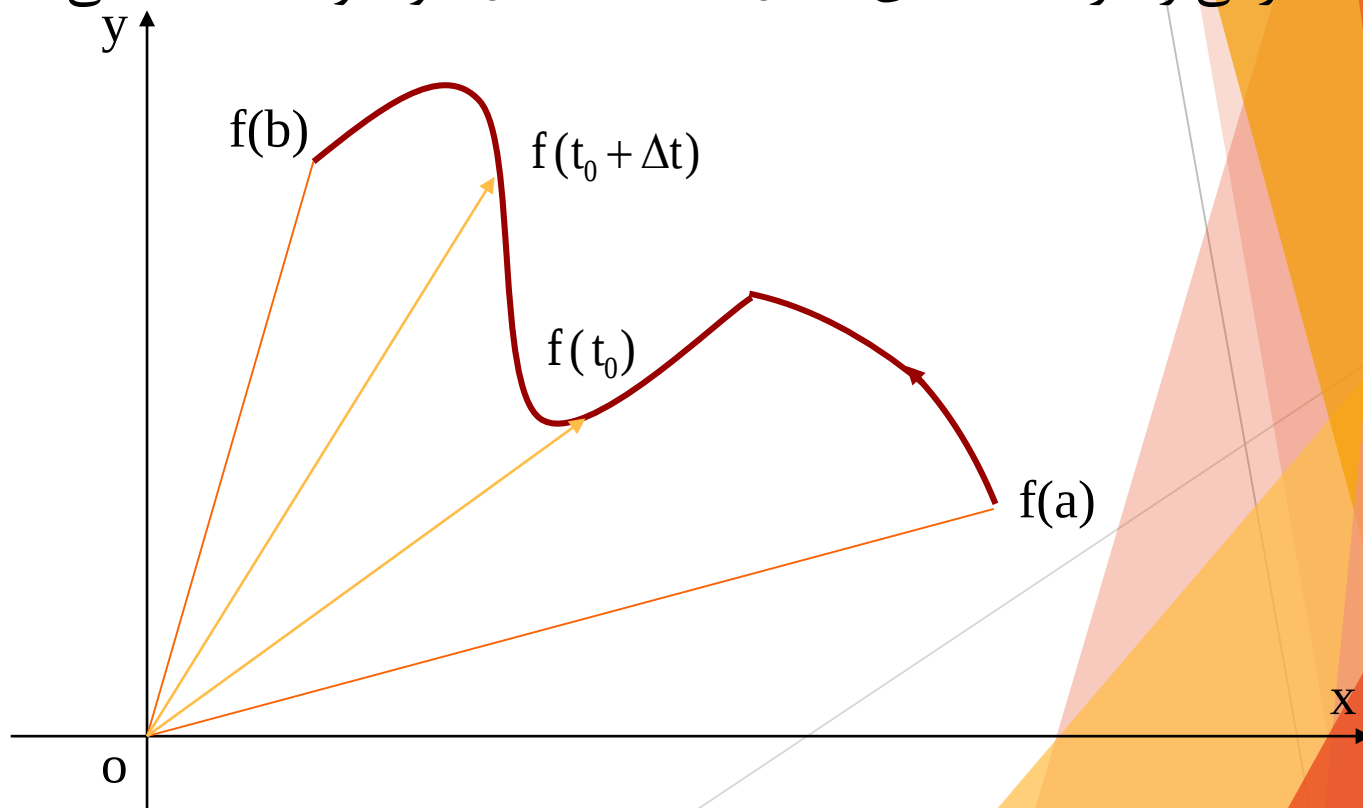
است. مفهوم انتگرال تابع برداری بسیاری از ویژگی های انتگرال توابع حقیقی

را دارا است. با وجود این، این مفهوم در قضیه میانگین برای انتگرال صدق نمی کند.

۵.۲ حرکت در صفحه

۱. ۵.۲ تعریف

بردار OA را شعاع حامل متحرک در لحظه t می نامیم ، در شکل زیر مسیر متحرکی را در لحظه های t_0 ، $t_0 + \Delta t$ و a و b مشاهده می کنید.



۲.۲. ۵. تعبیر های مشتق

فرض کنید

$$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

مکان متحرکی در لحظه t باشد، در این صورت رابطه

$$\mathbf{f}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\mathbf{i} + y(t + \Delta t)\mathbf{j}$$

مکان این متحرک در لحظه Δt خواهد بود. بنابراین

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

نماینده بردار سرعت متوسط در بازه زمانی از t تا $t + \Delta t$ است. در نتیجه در

صورتی که حد

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

وجود داشته باشد، برابر با بردار سرعت در لحظه t خواهد بود.

با توجه به این مطلب اگر سرعت متحرک در لحظه t را با $v(t)$ نشان دهیم، بنا به تعریف مشتق داریم

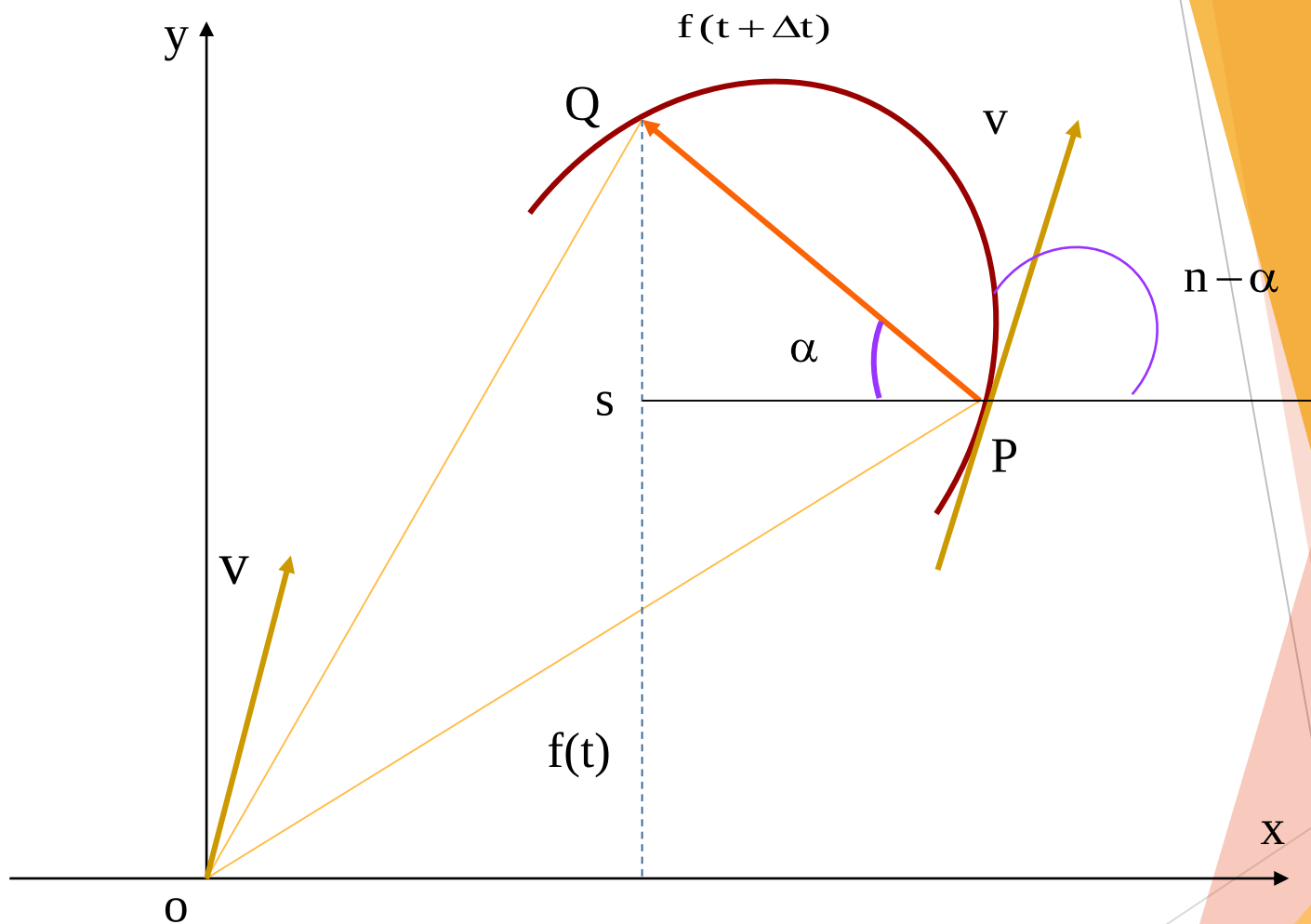
$$f'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = \mathbf{v}(t)$$

یعنی مشتق f در لحظه t ، مساوی است با سرعت متحرک در این لحظه، اکنون با توجه به شکل اسلاید بعدی مشاهده می کنیم که

$$f(t + \Delta t) = f(t)\mathbf{i} + \vec{PQ}$$

بنابراین داریم

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{PQ}}{\Delta t}$$



اگر $\mathbf{v}$ از $f(t)$ رسم شود ، بر مسیر متحرک مماس است.

در نتیجه اگر $\Delta t \rightarrow 0$ آنگاه نقطه Q روی مسیر متحرک به نقطه P میل می کند و لذا خط PQ به خط مماس بر خم تبدیل می شود. این بدان معناست که اگر مبدا بردار v را به نقطه P منتقل کنیم آنگاه $v(t)$ بر مسیر متحرک یا بر خم داده شده مماس می شود.

✳ بنابراین مشتق به عنوان یک بردار بر مسیر متحرک **مماس** است.

۳. ۲. ۵ تعریف

اگر $v(t)$ سرعت متحرک در لحظه t باشد، $|v(t)|$ را **اندازه** بردار سرعت متحرک می نامیم.

بنابراین خم مشتقپذیر

$$f(t) = x(t)i + y(t)j$$

مسیر متحرک باشد آنگاه اندازه بردار سرعت این متحرک عبارت است از

$$|v(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

✱ توجه کنید که سرعت متحرک یک بردار و اندازه بردار سرعت یک عدد است.

۴. ۲. ۵ مثال

(الف) مکان متحرکی در لحظه t عبارت است از

$$\mathbf{f}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}$$

مسیر، سرعت و اندازه بردار سرعت این متحرک رامعین می کنیم.

حل:

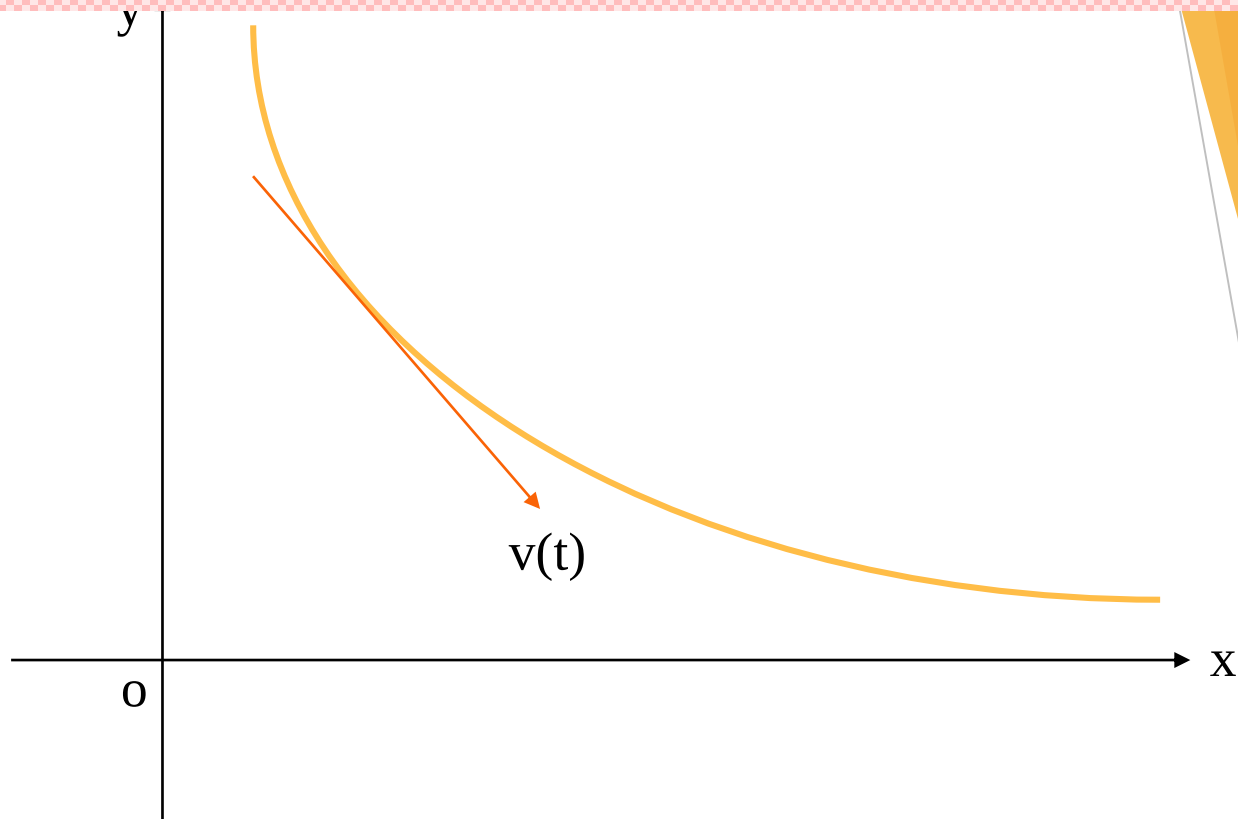
مختصات متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}$$

مشاهده می کنیم که در هر لحظه t ، $x > 0$ و $y > 0$ و

$$y = \frac{1}{x}$$

بنابراین مکان متحرک شاخه ای از هذلولی $y = \frac{1}{x}$ است که در ربع اول واقع است.



سرعت و اندازه بردار سرعت این متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$\mathbf{v}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} \quad , \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} = \sqrt{2 \cosh 2t}$$

مشاهده می کنیم که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-e^{-t}}{e^t} < 0$$

بنابراین زاویه بردار سرعت با جهت مثبت محور X، باز (منفرجه) است لذا بردار سرعت به صورتی است که در شکل اسلاید پیش نشان داده شده است.

(ب) یک ذره طبق رابطه زیر حرکت می کند

$$\mathbf{f}(t) = (r \cos \omega t)\mathbf{i} + (r \sin \omega t)\mathbf{j}$$

که در آن r و ω اعداد مثبت و ثابت اند. مسیر، سرعت و اندازه بردار سرعت این متحرک را شناسایی می کنیم.

حل:

مختصات این متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$x(t) = r \cos \omega t \quad , \quad y(t) = r \sin \omega t$$

چون

$$x^2(t) + y^2(t) = r^2$$

✳ پس مسیر متحرک دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع r است.

سرعت و اندازه بردار سرعت متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$\mathbf{v}(t) = (-r\omega \sin \omega t)\mathbf{i} + (r\omega \cos \omega t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{r^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = r\omega$$

چون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r \cos \omega t}{-r \omega \sin \omega t} = -\omega \cot \omega t = \tan \left(\frac{\pi}{2} + \omega t \right)$$

بنابراین در لحظه t ، زاویه بردار سرعت $v(t)$ با جهت مثبت محور x مساوی

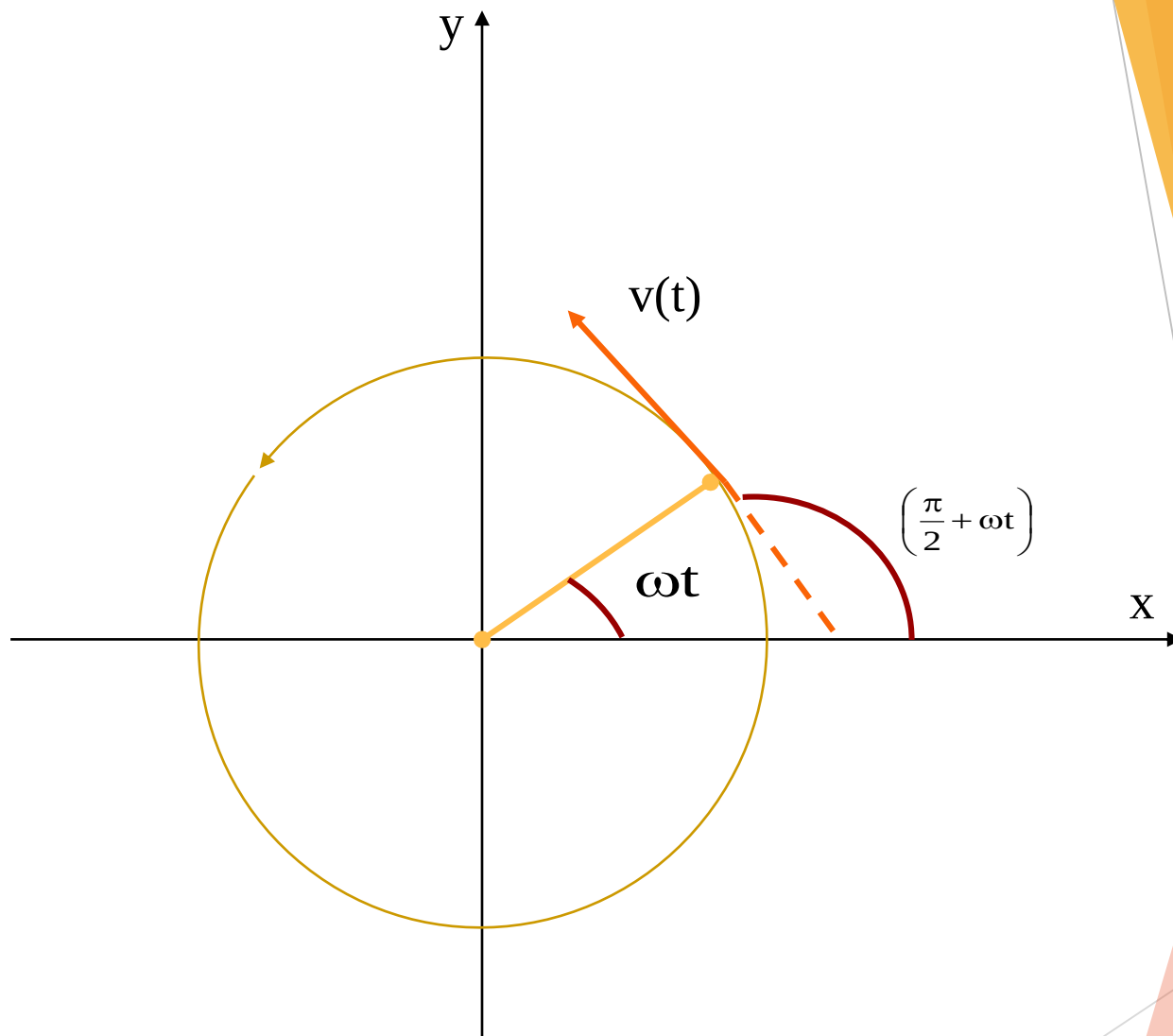
$$\left(\frac{\pi}{2} + \omega t \right)$$

است با

با توجه به اینکه در لحظه t ، شعاع حامل $f(t)$ با جهت مثبت محور x مساوی

است با ωt ، نتیجه می گیریم که بردارهای $f(t)$ و $v(t)$ در هر لحظه بر هم

عمودند و جهت $v(t)$ در جهت افزایش t است.



شعاع حامل و سرعت متعامدند

۵.۲.۵ تعریف

فرض کنید خم

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

مسیر متحرکی است و دست کم دو بار مشتقپذیر باشد. در این صورت بردار

$$f''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$$

را **شتاب متحرک** می نامیم و معمولاً آن را با $a(t)$ نشان می دهیم.

✱ بنابراین بردار $a(t)$ شتاب متحرک ، مشتق سرعت متحرک است.

$$a(t) = v'(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$$

۷.۲.۵ بردار یکه مماس

فرض کنید مسیر متحرک ، خم

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)i + y(t)j$$

توسط پارامتر طول خم s ، پارامتری شود. به ویژه داریم

$$s(t) = \int_{t_0}^t |v(\eta)| \, d\eta$$

بنابراین داریم

$$\frac{ds}{dt} = |v(t)|$$

(الف)

$$v(t) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{df}{ds} |v(t)|$$

(ب)

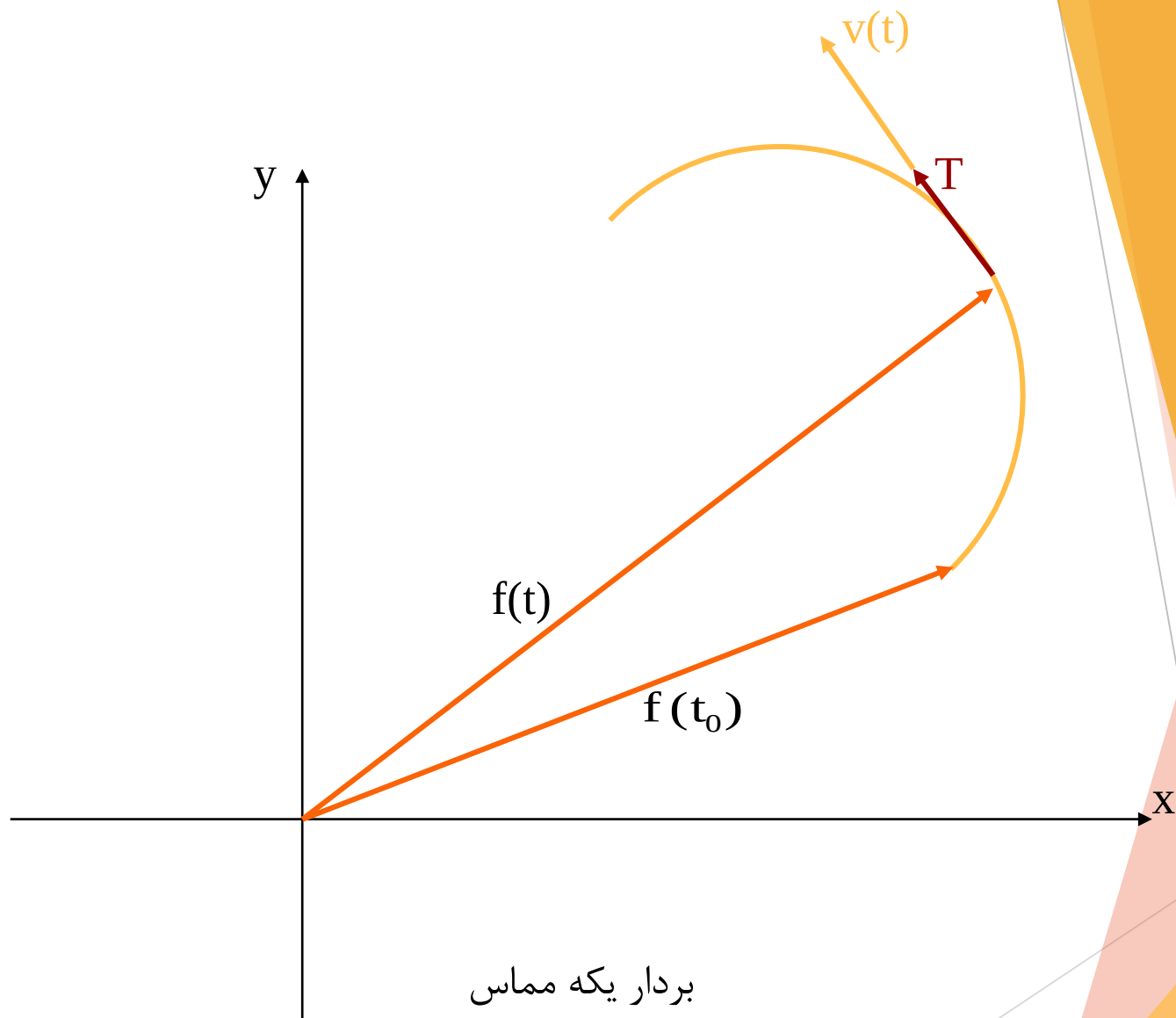
$$\frac{df}{ds} = \frac{v(t)}{|v(t)|}$$

ولذا

یعنی اگر خم ، مسیر متحرک ، نسبت به پارامتر طول خم پارامتری شود،
بردار سرعت نسبت به این پارامتر ، برداری واحد است و جهت آن با جهت
بردار سرعت نسبت به هر پارامتر دیگری است. این بردار را **بردار یکه مماس** می نامیم و با T نشان می دهیم.

$$T = \frac{df}{ds} = \frac{v(t)}{|v(t)|}$$

در شکل اسلاید بعدی بردار یکه مماس T را در لحظه t رسم کرده ایم.



۱۰. ۲. ۵ بردار یکه قائم

فرض کنید خم هموار

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

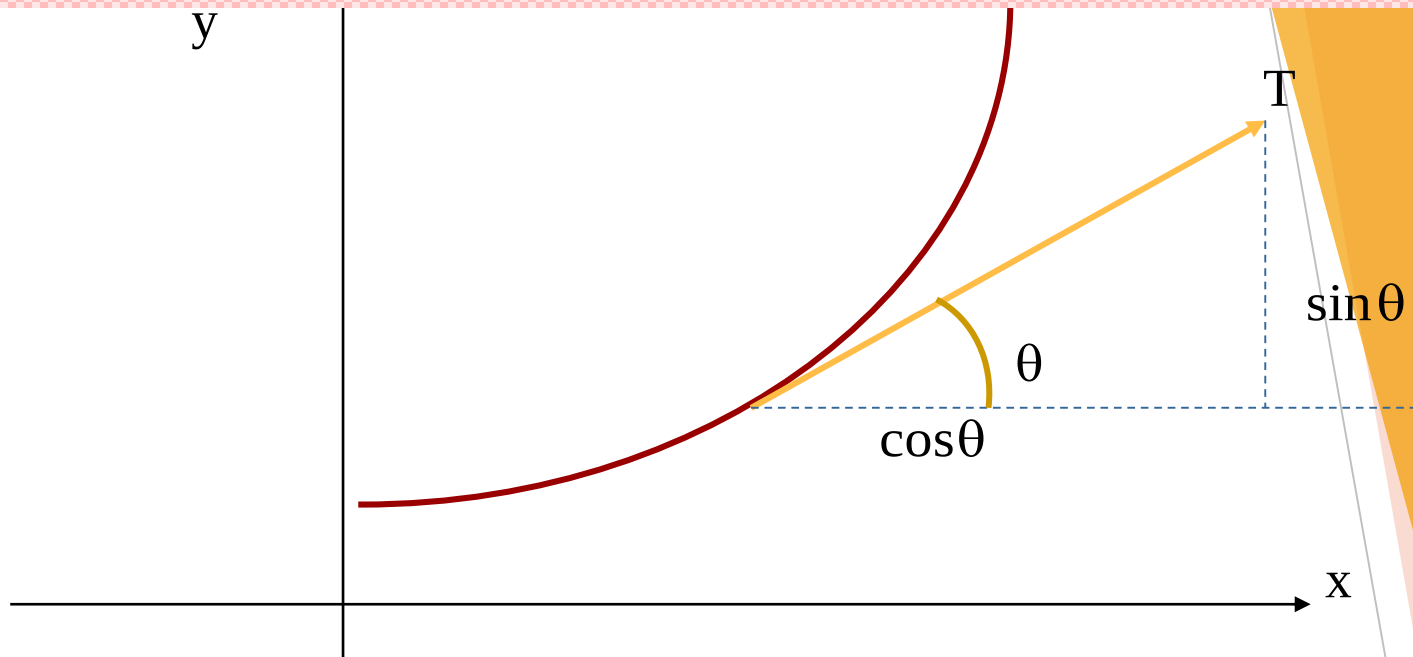
مسیر حرکت یک متحرک باشد. بنابراین در هر لحظه t ، بردار یکه مماس T بر این خم یا مسیر تعریف شده است. زاویه T با جهت مثبت محور x را θ می نامیم.  چون T برداری یکه است، پس جهت آن تابعی از اندازه زاویه θ است.

با توجه به شکل اسلاید بعدی می نویسیم

$$T = T(\theta) = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$$

داریم

$$\frac{dT}{d\theta} = (-\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$$

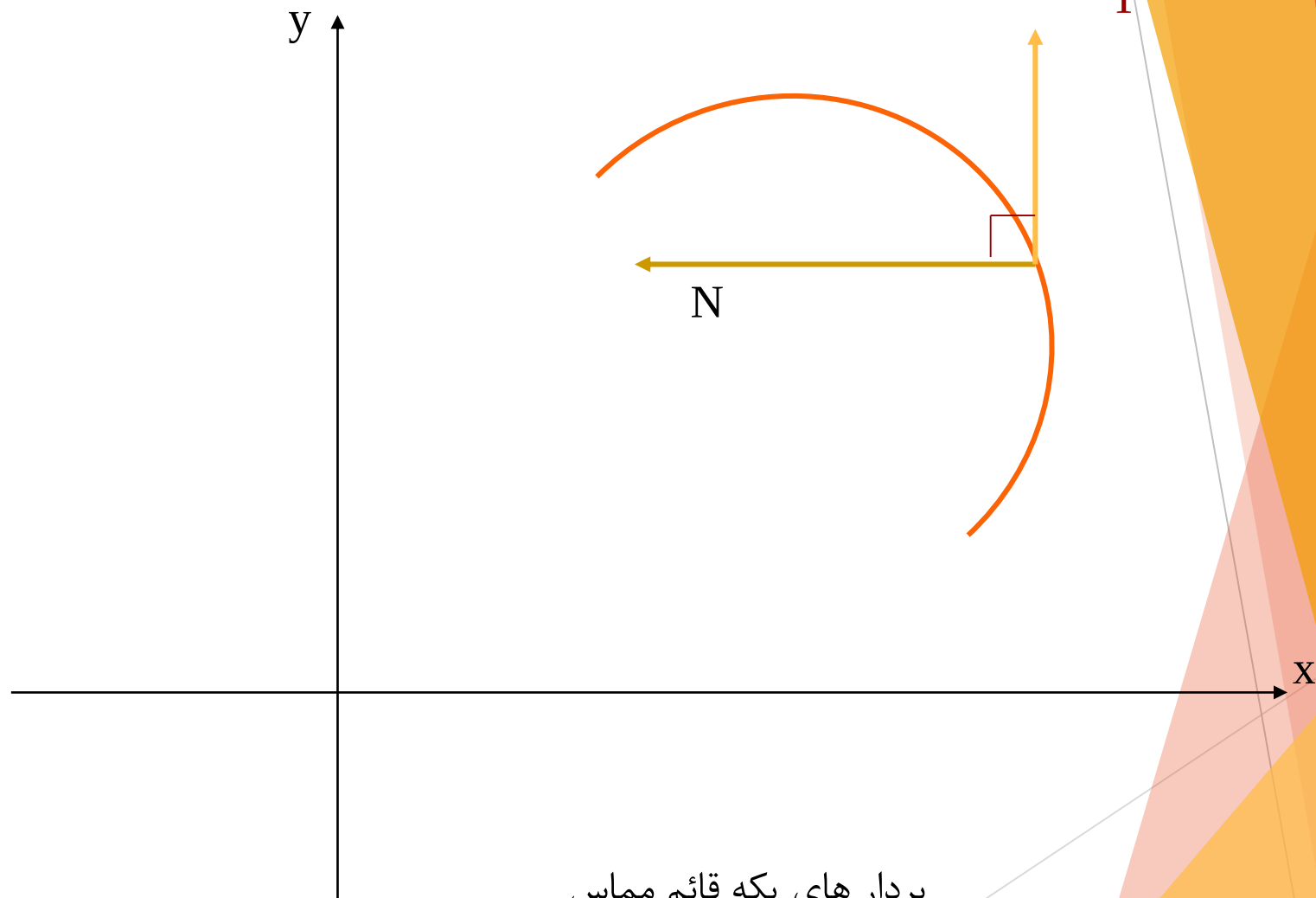


بنابراین $\frac{dT}{d\theta}$ برداری یکه وعمود بر T است و با جهت مثبت محور x زاویه ای به

اندازه $\frac{\pi}{2} + \theta$ می سازد. بنابراین $\pm \frac{dT}{d\theta}$ دو بردار یکه قائم بر T با جهت های

مخالف هم هستند. یکی از این دو بردار را که جهت آن به طرف تعقر خم است

ردار یکه قائم می نامیم و با N نشان می دهیم.



۱۱.۲.۵ مولفه های مماسی و قائم سرعت وشتاب

فرض کنید مسیر متحرک ، خم هموار و دو بار مشتقپذیر

$$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

باشد. سرعت این متحرک در لحظه t مساوی است با

$$\mathbf{V}(t) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \left(\frac{ds}{dt} \right) \mathbf{T}$$

بنابراین در دستگاه مختصات $\mathbf{T}\mathbf{N}$ داریم

$$\mathbf{V}(t) = \left(\frac{ds}{dt} \right) \mathbf{T} + 0\mathbf{N}$$

یعنی مولفه های $\mathbf{V}(t)$ در دستگاه $\mathbf{T}\mathbf{N}$ عبارت است از $\frac{ds}{dt}$ و 0 این عددها را به

ترتیب **مولفه های مماسی و قائم سرعت** می نامیم.

حال از رابطه * نسبت به t مشتق می گیریم تا شتاب متحرک را به دست آوریم.

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} T \right) = \frac{d^2s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \left(\frac{dT}{dt} \right)$$

داریم

حال $\left(\frac{dT}{dt} \right)$ را با استفاده از پارامتر θ محاسبه می کنیم. داریم

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

با قرار دادن $\frac{dT}{dt}$ از این رابطه در رابطه فوق به دست می آوریم

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} T + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} \left(\frac{dT}{d\theta} \right)$$

می دانیم که $\frac{dT}{d\theta}$ نامزد خوبی برای بردار یکه قائم است فقط جهت آن است

که اجازه نمی دهد در این رابطه به جای آن N قرار دهیم. برای تشخیص جهت

$\frac{dT}{d\theta}$ به صورت زیر عمل می کنیم.

الف) اگر $\frac{d\theta}{dt} > 0$ آنگاه θ نسبت به t صعودی است و بنابراین با افزایش t ، T در جهت مثلثاتی تابیده می شود و لذا زاویه بین T و $\frac{dT}{d\theta}$ که برابر $\frac{\pi}{2}$ است در جهت مثلثاتی تغییر می کند. این بدان معناست که

$$\frac{dT}{d\theta} = N$$

ب) اگر $\frac{d\theta}{dt} < 0$ آنگاه θ نسبت به t نزولی است و لذا بر حسب افزایش t ، T در جهت عقربه های ساعت تابیده می شود. و در این حالت داریم

$$\frac{dT}{d\theta} = -N$$

در نتیجه فرمول** را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{ds}{dt} \right) \left(\pm \frac{d\theta}{ds} \right) N = \frac{ds}{dt} \left| \frac{d\theta}{ds} \right| N$$

با استفاده از این فرمول ، رابطه *** به صورت زیر در می آید.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \mathbf{N}$$

عدهای $\frac{d^2s}{dt^2}$ و $\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$ را به ترتیب **مولفه های مماسی وقائم شتاب**

می نامیم. و آنها را به ترتیب با $\mathbf{a}_T$ و $\mathbf{a}_N$ نشان می دهیم. بنابراین داریم

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_T \mathbf{T} + \mathbf{a}_N \mathbf{N}$$

از این رابطه نتیجه می شود که

$$|\mathbf{a}(t)|^2 = a_T^2 + a_N^2$$

بنابراین برای پیدا کردن $\mathbf{a}_N$ ($\mathbf{a}_T$) لازم است که $|\mathbf{a}(t)|^2 - a_T^2$ ($|\mathbf{a}(t)|^2 - a_N^2$) را محاسبه کنیم.

۱۲. ۲. ۵ مثال

(الف) بردار یکه قائم ، مولفه های مماسی و قائم شتاب متحرکی با معادله مسیر حرکت زیر را پیدا کنید.

$$\mathbf{f}(t) = 3(\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + 3(\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$$

حل:

در لحظه t داریم

$$\mathbf{v}(t) = (3t \cos t)\mathbf{i} + (3t \sin t)\mathbf{j}$$

بنابراین

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)| = 3t$$

ولذا بردار یکه مماس در لحظه t عبارت است از

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}(t)}{\frac{ds}{dt}} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$$

این فرمول نشان می دهد که زاویه T با جهت مثبت محور x برابر است با t ، یعنی $\theta = t$. بنابراین $\frac{d\theta}{dt} = 1 > 0$ در نتیجه بردار یکه قائم بر مسیر عبارت است از

$$N = \frac{dT}{d\theta} = \frac{dT}{dt} = (-\sin t)i + (\cos t)j$$

چون $\theta = t$ پس $\frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dt} = 3t$

و بنابراین مولفه های مماسی و قائم شتاب عبارت اند از

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = 3$$

$$a_N = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = \frac{(3t)^2}{3t} = 3t$$

در نتیجه شتاب متحرک به صورت زیر به دست می آید.

$$a(t) = 3T + 3tN$$

۱۴. ۲. ۵ تعریف

عدد $\left| \frac{d\theta}{ds} \right|$ را که سرعت خمیده شدن مسیر متحرک نسبت به پارامتر طول خم است، **انحنای مسیر** یا **خم** می نامیم و آن را با حرف یونانی κ (بخوانید کاپا) نشان می دهیم.

$$\kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$$

✱ می توان ثابت کرد که انحنای κ ذاتی خود مسیر است و به انتخاب دستگاه مختصات بستگی ندارد. با وجود این پیدا کردن فرمولی برای محاسبه κ بر حسب مختصات مورد استفاده بسیار مناسب است.

✱ با توجه به تعریف مشاهده می کنیم که هر چه $\left| \frac{d\theta}{ds} \right|$ بیشتر (کمتر) باشد خمیدگی خم بیشتر (کمتر) است و لذا انتظار می رود که خمیدگی یک دایره کوچک عددی بسیار بزرگ و بر عکس خمیدگی خط راست صفر باشد.

۱۵. ۲. ۵ مثال

الف) انحنای خط راست زیر را پیدا کنید.

$$y=ax+b$$

حل:

با قرار دادن $x = t$ این خط را می توان به عنوان نگاره خم زیر در نظر گرفت.

$$f(t) = t i + (a t + b) j$$

داریم

$$a(t) = 0$$

و از این رو

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = a_N = 0$$

چون

$$\frac{ds}{dt} = |v(t)| = \sqrt{1 + a^2} \neq 0$$

پس

$$\left|\frac{d\theta}{ds}\right| = 0$$

✳ بنابراین انحنای خط راست صفر است. چیزی که انتظارش را داشتیم.

۱۷. ۲. ۵ محاسبه انحنای بر حسب مختصات

۱۸. ۲. ۵ مثال

(الف) مسیر متحرکی خمی با معادلات پارامتری زیر است

$$x(t) = 3\cos t, \quad y(t) = 4\sin t$$

انحنای این مسیر را در لحظه t و سپس در لحظه های $t = 0$ و $t = \frac{\pi}{2}$ پیدا کنید.

حل:
داریم

$$x' = -3\sin t, \quad x'' = -3\cos t, \quad y' = 4\cos t, \quad y'' = -4\sin t$$

بنابراین

$$\kappa = \frac{|12\sin^2 t + 12\cos^2 t|}{(9\sin^2 t + 16\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{12}{(9\sin^2 t + 16\cos^2 t)^{3/2}}$$

به ازای $t = 0$ و $t = \frac{\pi}{2}$ داریم

$$\kappa(0) = \frac{12}{36} = \frac{3}{16} \quad , \quad \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

(ب) انحنای خم $4y = x^2$ را پیدا کنید .

حل:

از فرمول $**$ داریم

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{3/2}}$$

مثلاً در نقطه $(0,0)$ انحنای این خم عبارت است از

$$\kappa(0) = \frac{1}{2}$$

✱ حال آخرین مفهوم این قسمت ، یعنی دایره انحنای را معرفی می کنیم .

۲۰. ۲. ۵ تعریف

خم هموار و دو بار مشتقپذیر زیر و نقطه P واقع بر آن را در نظر می گیریم.

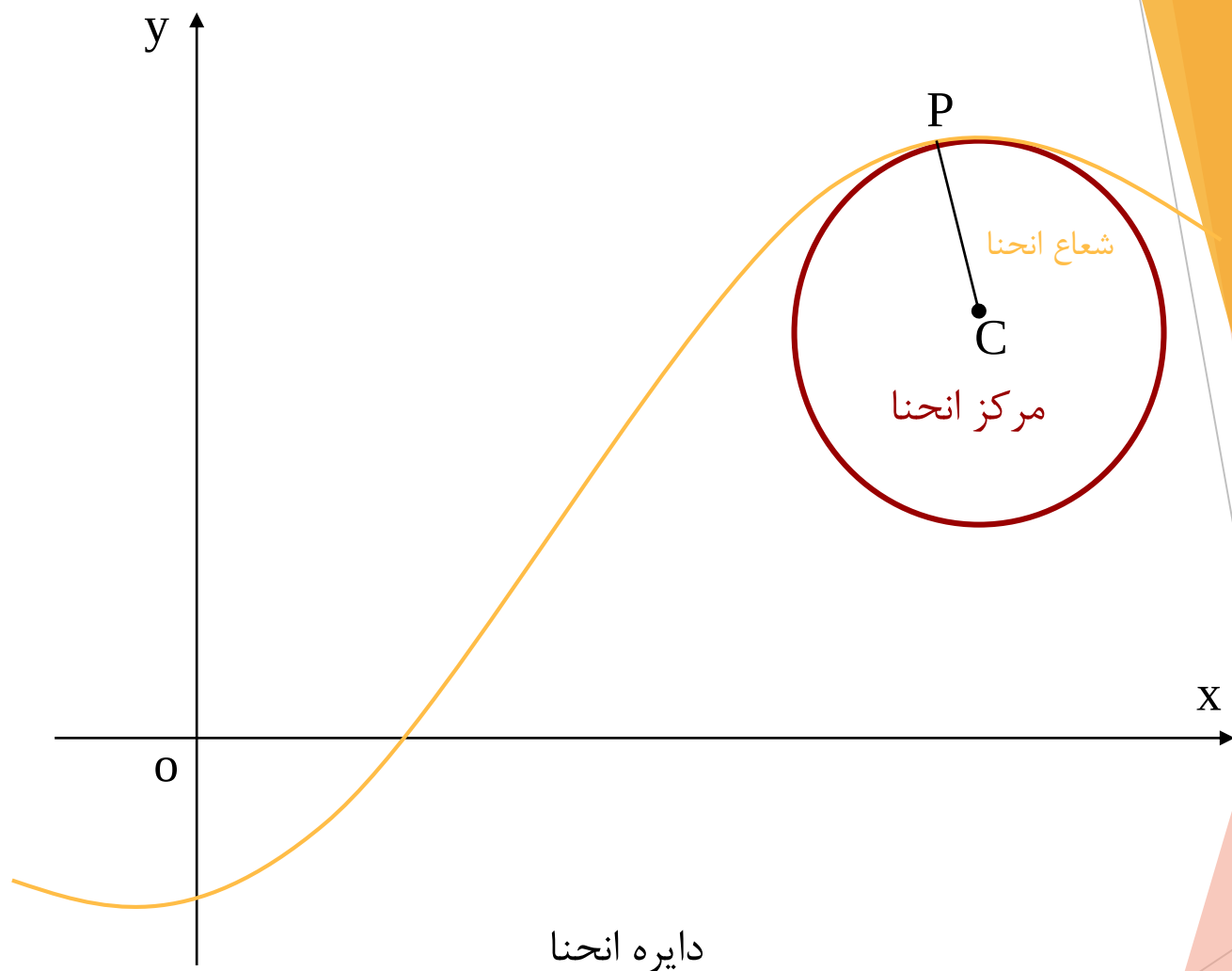
بر این خم در نقطه P دایره ای مماس می کنیم که

(الف) انحنای دایره مساوی با شد با انحنای خم

(ب) مرکز دایره در طرف تقعر خم و روی خط قائم بر خم در P باشد . این

دایره را دایره انحنای ، مرکز و شعاع آن را به ترتیب مرکز و شعاع انحنای خم در

نقطه P می نامیم .



۲۱. ۲. ۵ مثال

معادله دایره انحنای خم $y = e^x$ را در نقطه (۰، ۱) پیدا می کنیم .

حل:

نخست شعاع انحنای مسیر را پیدا می کنیم. برای این منظور انحنای مسیر را به دست می آوریم. داریم

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}$$

بنابراین در نقطه (0,1) انحنای مساوی است با

$$\kappa = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3$$

در نتیجه شعاع انحنای برابر است با

$$a = \frac{1}{\kappa} = (\sqrt{2})^3$$

اکنون روی خط عمود بر خم در نقطه $(0, 1)$ مرکز دایره انحنا را پیدا می کنیم.
معادله این خط عبارت است از

$$y = 1 - x$$

بنابراین اگر $A(a, b)$ مرکز انحنا باشد ، باید داشته باشیم

$$b = 1 - a , \quad a^2 + (b - 1)^2 = 2^3$$

با حل این دستگاه نسبت به a و b بدست می آوریم $b = 3$ و $b = -1$ ، بنابراین
نقاط ممکن برای مرکز دایره انحنا عبارت اند از $A(2, -1)$ و $A(-2, 3)$ در طرف
مقعر خم واقع است در نتیجه معادله دایره انحنا عبارت اند از

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^3$$

۳. ۵ حرکت در فضا

۱. ۳. ۵ تعریف مفاهیم اولیه

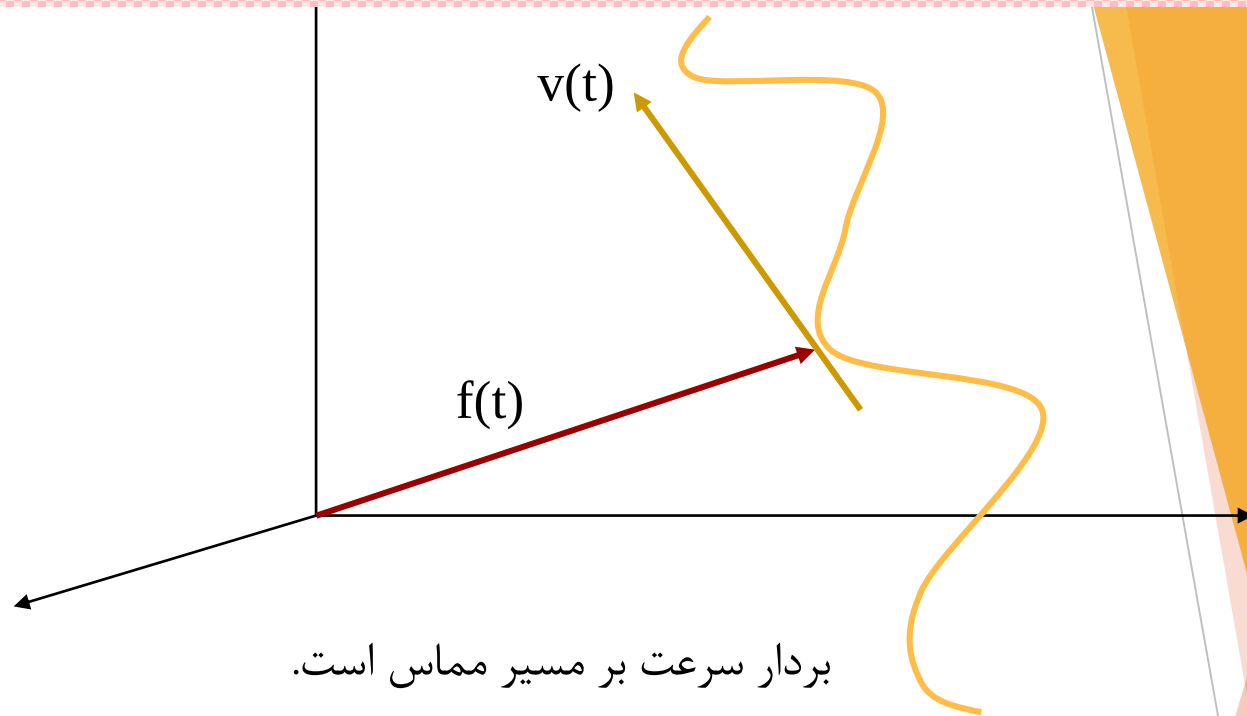
فرض کنید خم مشتقپذیر

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

مسیر یک متحرک باشد . بردار

$$f'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

را سرعت متحرک در لحظه t می نامیم و آن را با $v(t)$ نشان می دهیم .



چون به ازای هر $v(t) = f'(t) \neq 0, t \in [a, b]$ ، پس بردار یکه

$$T = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \frac{1}{|v(t)|} v(t)$$

بدون ابهام تعریف می شود.

این بردار را **برداریکه مماس** بر خم (یا مسیر متحرک) در نقطه t می نامیم.

فرض می کنیم

$$s(t) = \int_a^t |f'(\eta)| d\eta$$

*

طول خم از نقطه $f(a)$ تا نقطه $f(t)$ باشد. در این صورت $s(t)$ تابعی صعودی و مشتقپذیر از $s(t)$ است و داریم

$$\left(\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|v(t)|} \right) \frac{ds}{dt}(t) = |v(t)|$$

**

با استفاده از روابط * و ** داریم

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{v(t)}{|v(t)|} = T$$

یعنی مشتق بردار موضع نسبت به طول خم مساوی است با بردار یکه مماس
✱ طول بردار سرعت ، یعنی $|v(t)|$ در لحظه t را مقدار بردار سرعت متحرک
می نامیم.

✱ اگر علاوه بر هموار بودن ، تابع f دو بار مشتقپذیر باشد، آنگاه بردار

$$a(t)f''(t) = x''(t)i + y''(t)j + z''(t)k$$

راشتاب متحرک در لحظه t می نامیم.

۲.۳.۵ مثال

در مثال ۳۵.۱.۵ (پ) طول پیچوار

$$f(t) = (a \cos t)i + (a \sin t)j + (bt)k \quad t \in \mathbb{R}$$

را که بین نقطه های $f(0)$ و $f(t)$ و $(t > 0)$ واقع است به صورت

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} \, d\eta = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

محاسبه کردیم. چون

$$v(t) = (-a \sin t)i + (a \cos t)j + bk$$

پس بردار یکه مماس مساوی است با

$$T = \frac{v(t)}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t i + a \cos t j + bk)$$

همچنین داریم

$$a(t) = -a(\cos t i + \sin t j)$$

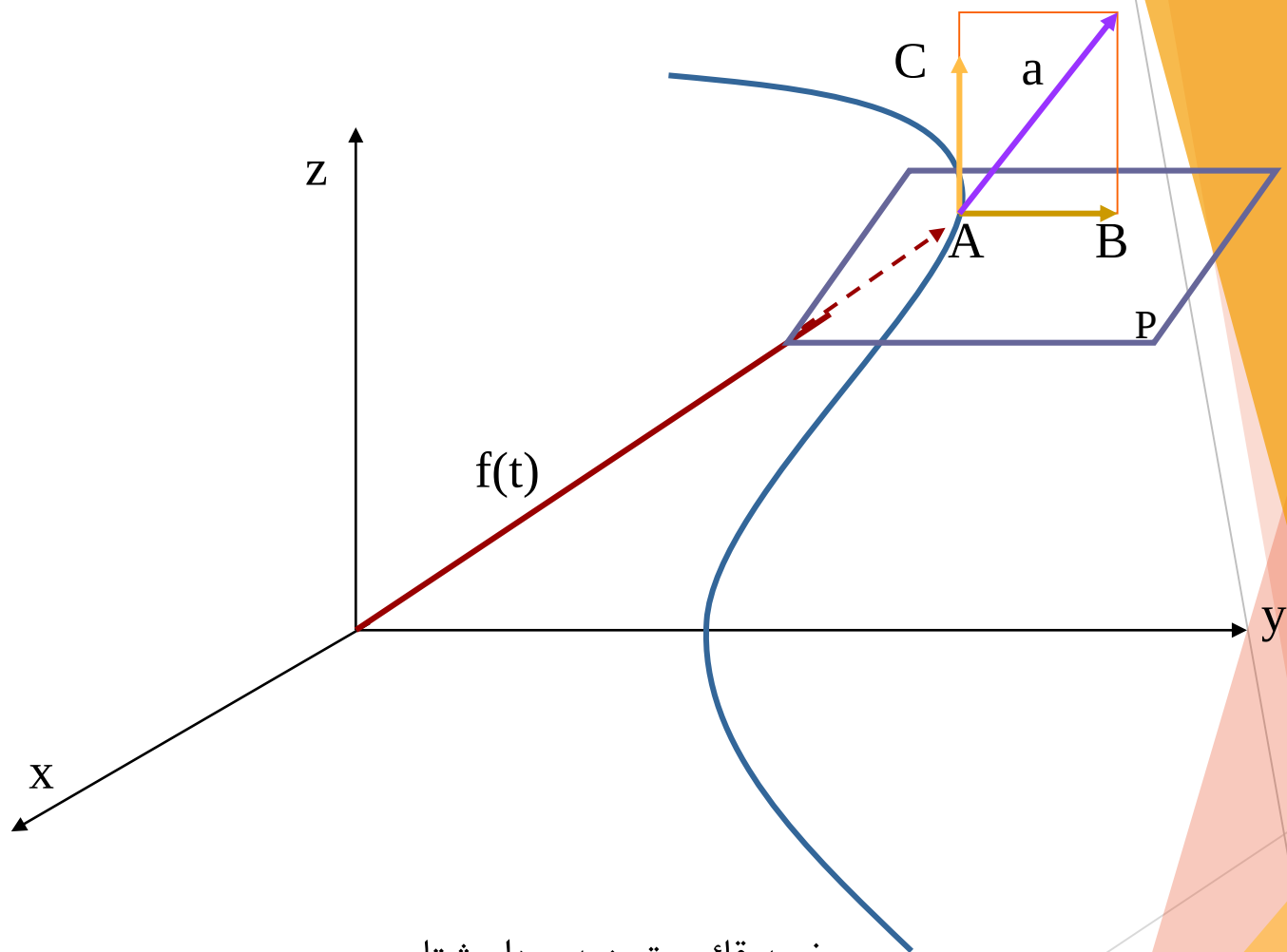
۴.۳.۵ صفحه قائم و مولفه های شتاب

می خواهیم بردار شتاب $a(t)$ را که از نقطه $f(t)$ رسم می شود به مجموع دو بردار

تجزیه کنیم ، یکی در امتداد بردار یکه مماس T و دیگری برداری واقع در صفحه

عمود بر T در نقطه $f(t)$. این صفحه را صفحه قائم بر خم (یا مسیر) در لحظه t

می نامیم.



صفحه قائم و تجزیه بردار شتاب

مشاهده می کنیم که بردار شتاب $\vec{a}$ به مجموع دو بردار $\vec{A\bar{B}}$, $\vec{A\bar{C}}$ تجزیه شده است.

$$\vec{a}(t) = A\vec{\bar{B}} + A\vec{\bar{C}}$$

می خواهیم این بردار ها را بر حسب تابع f شناسایی کنیم. با استفاده از قاعده زنجیری می نویسیم

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{df}{ds} \times \frac{ds}{dt} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{d^2f}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dt}{ds} \times \frac{d^2s}{dt^2} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} T + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left(\frac{d^2f}{ds^2} \right) \end{aligned}$$

اکنون از دو طرف رابطه زیر نسبت به S مشتق می گیریم.

$$T.T = \left(\frac{df}{ds} \cdot \frac{df}{ds} \right) = 1$$

در نتیجه

$$\frac{d^2f}{ds^2} \frac{df}{ds} = \frac{d^2f}{ds^2} \cdot T = 0$$

بنابراین بردار $\frac{d^2f}{ds^2}$ بر بردار مماس T عمود است. بنابراین اگر از نقطه A

رسم شود روی صفحه قائم خواهد بود. بردار یکه N را به صورت

$$N = \frac{\frac{d^2f}{ds^2}}{\left| \frac{d^2f}{ds^2} \right|}$$

تعریف می کنیم و آن را **بردار قائم اصلی** بر خم در نقطه $A = f(t)$ می نامیم.

با استفاده از * بر دار $a(t)$ را به صورت زیر می نویسیم.

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} T + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left| \frac{d^2f}{ds^2} \right| N$$

بنابراین بردار $a(t)$ به مجموع دو بردار تجزیه می شود.

۵.۳.۵ تعریف

(الف) عددهای $\frac{d^2s}{dt^2}$ ، $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left|\frac{d^2f}{ds^2}\right|$ را به ترتیب **مولفه های مماسی و قائم**

شتاب در لحظه t می نامیم و آنها را به صورت زیر نشان می دهیم

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad a_N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left|\frac{d^2f}{ds^2}\right|$$

(ب) بردار $\frac{dT}{ds}$ و اندازه آن عدد

$$\kappa = \left|\frac{d^2f}{ds^2}\right| = \left|\frac{dT}{ds}\right|$$

را به ترتیب **بردار انحنا و انحنای مسیر** در لحظه t می نامیم.

۶. ۳. ۵ مثال

(الف) بردار قائم اصلی، معادله صفحه قائم و انحنای خم

$$f(t) = (a \cos t)i + (a \sin t)j + (bt)k \quad t \in \mathbb{R}$$

رادر نقطه $A(-a, 0, b\pi)$ که به ازای $t = \pi$ به دست می آید، پیدا می کنیم.

حل:

بنا بر مثال ۲. ۳. ۵ بردار یکه مماس در لحظه t عبارت است از

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t i + a \cos t j + bk)$$

و لذا در نقطه A داریم

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-aj + bk)$$

همچنین در لحظه t داریم

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} ((-a \cos t)i + (-a \sin t)j)$$

بنابراین با توجه به رابطه

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

در نقطه A یعنی در لحظه π داریم

$$\frac{dT}{ds} = \frac{ai}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بنابراین انحنای مسیر در نقطه داده شده ، مساوی است با

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

و از این رو بردار قائم اصلی عبارت است از

$$N = \frac{dt}{ds} = i$$

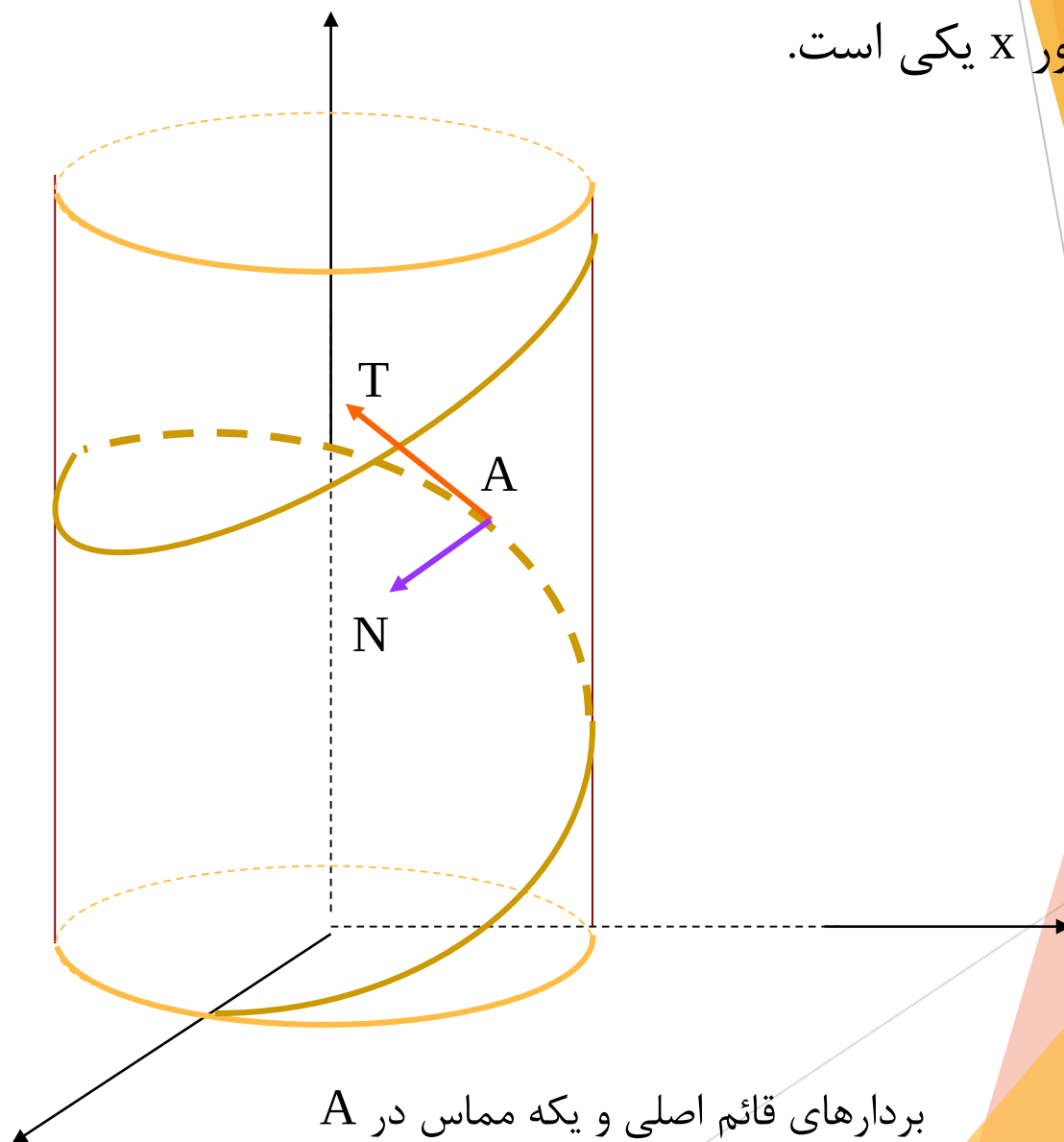
چون صفحه قائم از A می گذرد و بر T عمود است پس معادله آن عبارت است از

$$(x + a, y, z - b\pi) \cdot T = 0$$

یا

$$ay - b(z - b\pi) = 0$$

در شکل زیر مبدا N را در A قرار داده و آن را رسم کرده ایم. توجه کنید که جهت N و محور x یکی است.



بردارهای قائم اصلی و یکه مماس در A

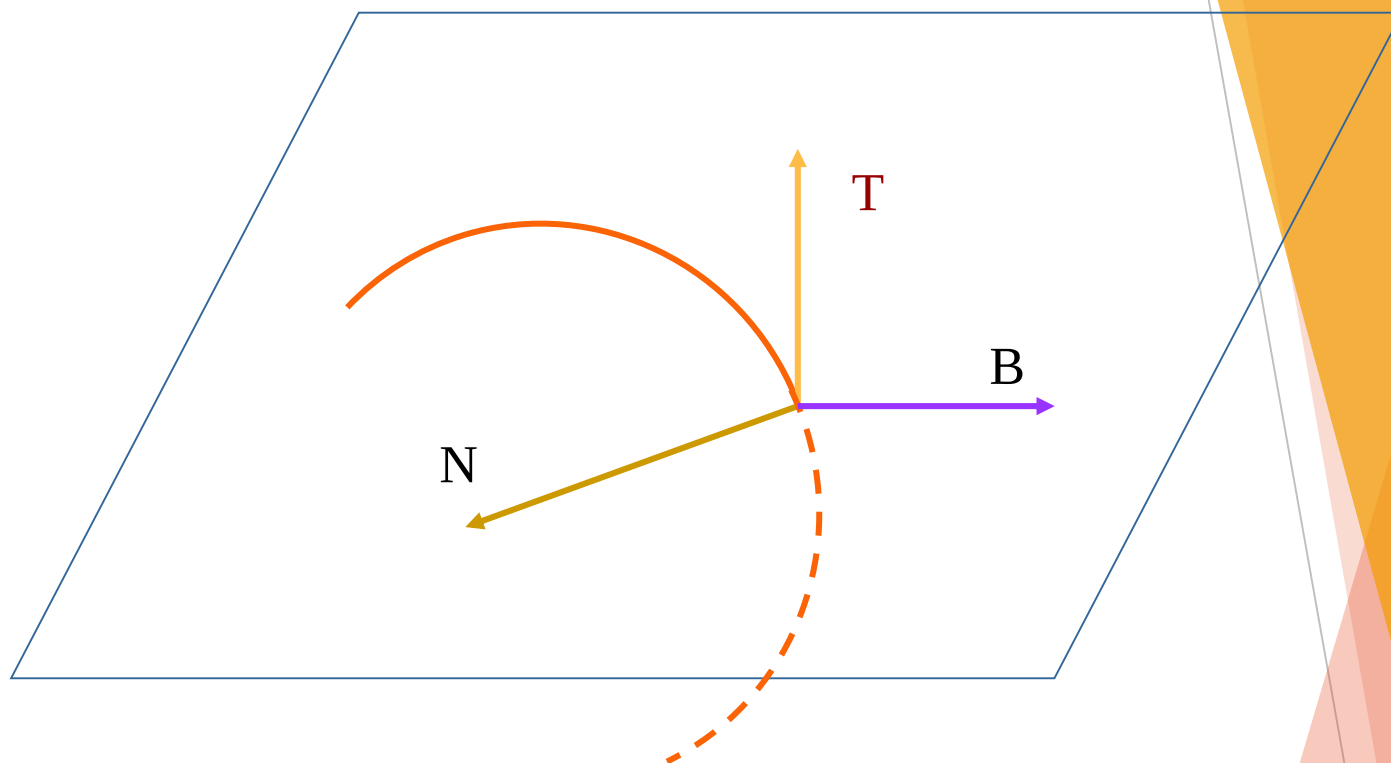
۸.۳. ۵ قائم مضاعف و تاب

دیدیم که اگر خم هموار

$$f(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \quad t \in [a, b]$$

دو بار مشتقپذیر باشد، آنگاه به ازای هر t ، صفحه قائم بر خم و مولفه های مماسی و قائم شتاب بدون هیچ ابهامی تعریف می شوند. می دانیم که بردار قائم اصلی N در صفحه قائم قرار دارد و بردار یکه مماس T بر این صفحه عمود است. اکنون در صفحه قائم بردار یکه B را چنان در نظر می گیریم که دستگاه TNB یک دستگاه راستگرد باشد.

بردار B را قائم مضاعف بر خم، صفحه تشکیل شده توسط بردارهای N و T را صفحه **بوسان** و صفحه تشکیل شده توسط بردارهای B و T را صفحه **رکتیفایر** (یکسوساز) در لحظه t می نامیم.



TNB یک دستگاه راستگرد است.

✱ $\frac{dB}{ds}$ بر T نیز عمود است .

در نتیجه $\frac{dB}{ds}$ مضربی از بردار N است. یعنی عددی چون τ وجود دارد که

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

✱

τ را **تاب خم** در نقطه مورد محاسبه می نامیم.

فرمول ✱ نشان می دهد که

$$|\tau| = \left| \frac{dB}{ds} \right|$$

✱ و از این رو ، **تاب آهنگ چرخش** بردار B است.

✱ توجه کنید که انحنای τ هرگز منفی نیست ولی تاب می تواند مثبت ،

صفر یا منفی باشد.

۹. ۳. ۵ مثال

(الف) معادله صفحه بوسان و تاب خم

$$f(t) = (\sqrt{3} \cos t)i + (\sqrt{3} \sin t)j + k \quad t \in \mathbb{R}$$

را پیدا کنید.

حل:

این خم محل تلاقی صفحه $z = 1$ و استوانه $x^2 + y^2 = 3$ است. و بنابراین

خمی مسطح است. پس صفحه بوسان آن عبارت است از $z = 1$. چون خم

مسطح است پس تابی ندارد یعنی $\tau = 0$.

۱۲.۳.۵ محاسبه انحنا

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)|}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} = \frac{|f'(t)f''(t)|}{|f'(t)|^3}$$

۱۲.۳.۵ مثال

مسیر متحرکی عبارت است از

$$\mathbf{f}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \quad t \in \mathbb{R}$$

ما خواهیم انحنای مسیر را پیدا کنیم و معادله صفحه قائم بر مسیر را در نقطه ای که انحنا بیشینه است به دست آوریم.

حل:

داریم

بنابراین

از این رو

$$f'(t) = i + j + 2tk, \quad f''(t) = 2k$$

$$f'(t)f''(t) = -2j + 2i, \quad |f'(t)f''(t)| = 2\sqrt{2}$$

$$|f'(t)| = \sqrt{2 + 4t^2}$$

$$\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3 (1 + 2t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1 + 2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

چون $\kappa = 1$

بیشینه انحنا وقتی به دست می آید که $t = 0$ به ازای این مقدار

صفحه قائم از نقطه $(0, 0, 0)$ می گذرد و بر بردار یکه مماسی

$$T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i + j)$$

عمود است، پس معادله آن به صورت زیر است

$$x + y = 0$$

۱۵. ۳. ۵ محاسبه تاب

بنا به تعریف عدد τ را که در فرمول

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

صدق می‌گردد **تاب خم** یا **مسیر متحرک** می‌نامیم.

$$\tau = \frac{(f'(t) \times f''(t) \cdot f'''(t))}{|f'(t) \times f''(t)|^2}$$

با استفاده از این فرمول یکی از مهمترین خصوصیات خمها مسطح به دست می‌آید.

❖ می‌دانیم که اگر $\tau = 0$ نگاه خم مسطح است. به عبارت دیگر اگر

$$(f'(t) \times f''(t) \cdot f'''(t)) = 0 \quad **$$

نگاه خم داده شده $f(t)$ مسطح است.

برعکس اگر خم $f(t)$ مسطح باشد، روشن است که بردارهای $(f'(t), f''(t), f'''(t))$ نمی توانند کنجی نابدیهی بسازند و از این رو ، $***$ مجدداً برقرار است.

$*$ بنابراین خم $f(t)$ در یک صفحه قرار دارد اگر و تنها اگر تاب آن صفر باشد. به عبارت دیگر خم مسطح است اگر و تنها اگر رابطه $***$ برقرار باشد.

۱۶. ۳. ۵ مثال

الف) خم

$$f(t) = \sqrt{t^2 + 1} \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} + 2t \mathbf{k} \quad t \in \mathbb{R}$$

مسطح است) در یک صفحه قرار دارد) بنابراین تاب آن در هر نقطه صفر است.

ب) تاب خم

$$f(t) = (e^{-t} \cos t)i + (e^{-t} \sin t)j + e^{-t}k \quad t \in \mathbb{R}$$

را در نقطه دلخواه $f(t)$ محاسبه می کنیم و نشان می دهیم که این خم مسطح نیست.

حل:
داریم

$$f'(t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)i + e^{-t}(\cos t - \sin t)j - e^{-t}k$$

$$f''(t) = (2e^{-t} \sin t)i - 2(e^{-t} \cos t)j + e^{-t}k$$

$$f'''(t) = 2e^{-t}(\cos t - \sin t)i + 2e^{-t}(\cos t + \sin t)j - e^{-t}k$$

بنابراین داریم

$$f'(t) \times f''(t) = -e^{-2t}(\cos t + \sin t)i + e^{-2t}(\cos t - \sin t)j + 2e^{-2t}k$$

$$|f'(t) \times f''(t)| = e^{-2t} \sqrt{6}$$

$$(f'(t) \times f''(t).f'''(t)) = -2e^{-3t}$$

در نتیجه داریم

$$\tau = \frac{((f' \times f'').f''')}{|f' \times f''|^2} = \frac{-2e^{-3t}}{6e^{-4t}} = \frac{1}{3} e^t$$

چون $\tau \neq 0$ پس خم داده شده مسطح نیست.